الأستاذ. بوعجاب عبد القادر

# المراجعة النهائية

# الريانيات

٥ دروس ملخصة

تمارین محلولة بالتفصیل

و مواضيع بكالوريا محلولة

SAS

علوم تجريبية وياضيات

تقني رياضي







| 1-النهايات-الاستمرارية-الاشتقافية ودراسه الدوال | دیہ 3  |
|---|--------|
| معارف   | 3      |
| تمارين محلولة بالتفصيل                          | 11 —   |
|   | 200    |
| 2 الدوال الأسية واللوغاريتمية                   | 30 —   |
| معارف   | 30 ——— |
| تمارين محلولة بالتفصيل                          | 35     |
| 3ـ الهندسة في الفضاء                            | 72     |
| معارف   | 72     |
| تمارين محلولة بالتفصيل                          | 77     |
| 4 الأعداد المركبة والتحويلات النقطية            | 96 —   |
| معارف   | 96 —   |
| تمارين محلولة بالتفصيل                          | 98 ——— |
|   |        |
| 5-المتتاليات العددية                            | 118    |
| معارف   | 118    |
| تمارين محلولة بالتفصيل                          | 121    |
| 6. الدوال الأصلية و الحساب التكاملي             | 143    |
| معارف   | 143    |
| تمارين محلولة بالتفصيل                          | 146    |
| مواضيع بكالوريا محلولة                          | 164    |

#### 🛚 حساب النهايات:

| $\frac{\infty}{0} = \infty$ | $\frac{a}{0} = \infty  (a \in R^*)$ | $\frac{a}{-}=0$ |
|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| $\frac{0}{\infty} = 0$      | $\frac{0}{a} = 0  (a \in R^*)$      | ∞               |

 $\frac{0}{0}$ ;  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $+\infty-\infty$ ;  $0\times\infty$ ;  $\infty$  النعيين  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  الخرق التالية:  $\infty$  الاختزال أو التحليل او المرافق أوالعدد المشتق.

#### ■ النهايات والحصر: الحصر عند نهاية منتهية:

و ا عدد حقیقی. f, h, g دوال عددیة معرفة علی المجال I و f, h, g إذا كانت:  $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$  و كانت  $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$  و كانت  $g(x) \le f(x) \le h(x)$  :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

x > -1 فإن برهن أنه إذا كان x > -1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = \frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

♦ x > -1 و منه فإن: 0 < x + 1 > 0 كما أن:

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$
: و منه فإن  $-1 \le \cos x \le 1$ 

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0 :$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0 \text{ if } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

#### ■ المستقيمات المقاربة : (a) عدد حقيقي ثابت)

المستقيم المقارب العمودي على محور الفواصل:  $\binom{C_f}{:} : \lim_{x \to a} f(x) = \infty :$  فإن  $: \binom{C_f}{:} :$  يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته

المستقيم المقارب الموزاي لمحور الفواصل:

: نإن  $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$  نإن (إذا كانت : الإذا كانت)

يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل  $\left(C_{f}
ight)$ 

 $\cdot$  ( y = a ) معادلته

(x=a)

المستقيم المقارب المائل:

وجود  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$  : فإنه يحتمل وجود  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$  : مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل y = ax + b طريقة إثبات أن المستقيم الذي معادلته y = ax + b

 $:\left( C_{f}
ight)$  مقارب مائل للمنحنى

 $\lim_{x\to\infty} (f(x)-y) = \lim_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ اذا كانت:

 $(C_f)$ فإن: المستقيم y=ax+b مقارب مائل للمنحنى

■ طريقة إيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل مباشرة من

عبارة الدالة f

f(x) = ax + b + h(x) : إذا كانت: عبارة f من الشكل

 $\lim_{x\to\infty} h(x)=0$  :وكانت

 $(C_f)$ فإن: y = ax + b فإن

المستقيم المقارب  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم المقارب y = ax + b الذي معادلته

f(x) - y = f(x) - (ax + b): ندرس إشارة الفرق

#### تمرين تطليقي

: كها يلي -2 جي الدالة العددية المعرفة على -2

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$$

- أحسب النهايات ثم أعط التفسير البياني لكل نهاية .
  - : عين الأعداد الحقيقية c, b, a بحيث يكون  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
  - y=x-2 : بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة .  $C_f$  مقارب مائل لـ . ( $C_f$  ) .
    - $(C_f)$  و ( $\Delta$ ) و أدرس الوضع النسبي بين

#### والحاله

\* حساب النهايات مع إعطاء التفسير البياني لكل نهاية:  $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \left( \frac{x^2 + 5}{x + 2} \right) = +\infty :$   $\lim_{x \to -2} (x + 2) = 0^+ \int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$   $\int_{x \to -2} \frac{\lim_{x \to -2} (x^2 + 5)}{\int_{x \to -2} (x^2 + 5)} = 0$ 

: كنا:  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$  لان

مقارب يوازي ('yy').

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x + 2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

: c, b, a تعيين الأعداد الحقيقية  

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

 $f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$   $= \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x+2}$   $= \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2}$ 

a = 1

بالمطابقة نجد : 
$$2a+b=0$$
 بالمطابقة نجد :  $2b+c=5$   $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ 

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 : a$$

$$c=9$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{9}{x+2}$$
 : و بالتالي فإن

y = x - 2 : أثبات أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة \* مقارب مائل لـ : ( $C_{c}$ ) :

دينا

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[ x - 2 + \frac{9}{x + 2} - (x - 2) \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{9}{x + 2} \right) = 0$$

و منه: y = x - 2 مستقيم مقارب مائل للمنحنى y = x - 2. \* دراسة الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  و  $(C_f)$  ندرس إشارة الفرق f(x) - y

$$x > -2$$
 ,  $f(x) - y = \frac{9}{x+2}$  : بيا أن:

f(x)-y>0 : فإن f(x) فإن المنحنى  $G(C_f)$  يقع فوق المستقيم  $G(\Delta)$  .

الاستمرارية وتظرية القيم المتوسطة:

\*دراسة استمرارية دالة /عند عدد حقيقي المن مجموعة تعريفها:

تكون f مستمرة عند a إذا تحقق ما يلي:

 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 

ملاحظة: ( في بعض الدوال ندرس الاستمرارية من اليمين ومن اليسار عند القيمة a)

\* دراسة الاستمرارية على يمين a :

. a نانت:  $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \int_{a}^{a} f(x) dx$ 

\* دراسة الاستمرارية على يسار a :

. aإذا كنت:  $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$  فإن  $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 

\* نظرية القيم المتوسطة:

ن طريقة إثبات أن المعادلة f(x) = k تقبل حلا وحيدا في المجال [a,b] :

[a,b] مستمرة على المجال f (1

(أي متناقصة أو متزايدة ) متناقصة أو متزايدة ) f

. f(b) و f(a) و k (3

إذا تحقق 1 و 2 و 3 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة f(x) = k تقبل حلا وحيدا في المجال [a,b]. ملاحظة مهمة :

يمكن أن يطرح السؤال كالأتي:

أثبت أن  $(C_f)$  يقطع المستقيم الذي معادلته y=k في المبت أن [a;b] في المجال أ[a;b]

\* حالة خاصة:

ن طريقة إثبات أن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا في المجال [a,b]:

[a,b] مستمرة على المجال f (1

ر تيبة على المجال [a,b] ( أي متناقصة أو متزايدة ).

. f(b) و f(a) و f(a)

 $f(a) \times f(b) < 0$ :

إذا تحقق 1 و 2 و 3 و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة a;b[x]=0 تقبل حلا وحيدا في المجال a;b[x]=0

ملاحظة مهمة:

يمكن أن يطرح السؤال كالأتي:

أثبت أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  في المجال [a,b].

#### كمرون الطبياتي

.  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ : بالدالة f المعرفة على  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ : بين أن المعادلة f(x) = 3 تقبل حلا  $\alpha$  في المجال f(x) = 3

#### الكالع

ر مستمرة على المجال [1,2] لأنها دالة كثير حدود f(1)=1 و f(1)=1 .

و بها أن 1<3<13 أي (2) 3< أرا

f(x)=3 فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $\alpha = 3$  قبل حلا  $\alpha = 1.2$ 

#### التروين الأعلياتي

 $\alpha$  عصور تين أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ 

ين 1,6 و 1,7 .

#### الحلء

1) تغيرت الدالة g:

معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ومنه قابلة للاشتقاق g

على ]∞+;1-[ودالتها المشتقة:

 $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ 

#### g'(x) إشارة

| قیم x        | -1 | 0 |   | 1 | +∞ |
|--------------|----|---|---|---|----|
| g'(x) إشارة: | +  |   | - |   | +  |
|              |    | Ĭ |   |   |    |

و منه : g متزايدة على كل من المجالات ]∞+;[]; [1;+∞] و منه : x ∈ [0;1] ;

$$g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$$
 (2  
 $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$  )  
 $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$  )  
 $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$  )

g (1 مستمرة ومتزايدة تماما على [1,6;1,7]

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد  $\alpha$  من المجال  $g(\infty)=0$  عقق  $g(\infty)=0$  وبها أن  $g(\infty)=0$  متزايدة تماما على  $g(\infty)=0$  فإن  $g(\infty)=0$  وحيد .

#### تمرين تطبيقي:

بين أن المعادلة :  $0 = 3 - 5x^2 - 3 = 0$  تقبل حلا في المجال  $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$ 

#### الحله

 $\left[\frac{5}{2};3\right]$  نعتبر الدالة f المعرفة على المجال  $f(x)=2x^3-5x^2-3$  حيث:  $f(x)=2x^3-5x^2-3$  ديث حدود  $\left[\frac{5}{2};3\right]$  لأنها دالة كثير حدود f(3)=6 ،  $f\left(\frac{5}{2}\right)=-3$  و f(3)=6 ،  $f\left(\frac{5}{2}\right)=-3$ 

و بيا أن  $f(3) \times f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$  فإنه حسب مبرهنة القيم

 $\alpha$  المتوسطة فإن المعادلة  $0=3-5x^2-3=0$  تقبل حلا

 $\alpha \in \left[\frac{5}{2},3\right]$  حيث:

#### الإشتقاقية:

تعریف: f دالة معرفة علی مجال مفتوح من مجموعة الأعداد a الحقیقیة یشمل العدد a فإن a قابلة للاشتقاق عند a اذا كانت :  $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x \to a}$  منتهیة .

معناه: 
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$$
 عدد حقیقی ثابت).

. a ويسمى L العدد المشتق للدالة f عند العدد الحقيقي f'(a) = L . ونرمز له بـ :

 $f(x)=3x^2-2x-1$ مثال: لتكن f الدالة المعرفة على R بـ: a=2 عند العدد a=2 عند العدد

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 - 2x - 1) - (7)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{3 \cdot x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

لاحظ: ( 0 → البسط و 0 → المقام )

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2) \cdot (3x + 4)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2) \cdot (3x + 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10$$

a=2 ومنه : نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد a=2 هو : والعدد المشتق للدالة f عند العدد a=2 هو : f'(2)=10

x = a + h ، ومنه : x - a = h ، ومنه :  $h \to 0$  : وإذا كان :  $x \to a \to 0$  : فإن :  $x \to a \to 0$  . وإذا كان :  $x \to a \to 0$  . وإذا كان :  $x \to a \to 0$  . ومنه :  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  . ومنه : أي لدراسة الاشتقاق عند العدد a يمكن حساب :

fوإذا كانت النتيجة منتهية نقول  $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ قابلة للاشتقاق عند a

$$f(x)=3x^2-2x-1$$
 . (نفس المثال السابق ) .  $a=2$  عند العدد  $a=2$  عند العدد

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(2+h)^2 - 2(2+h) - 1) - (7)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 10h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+10)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3h+10) = 10$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد a=2 والعدد المشتق للدالة f عند العدد a=2 هو :

$$f'(2)=10$$

\*العدد المشتق على اليمين:

#### تعريف:

[a; a+h [ إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل f عدد حقيقى موجب تماما .

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L :$$
وكانت :  $L$  عدد حقيقي ثابت ).

a نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليمين عند العدد الحقيقي a . a العدد المشتق للدالة f على يمين العدد a \*العدد المشتق على اليسار:

#### تعریف:

 $\left[a-h;a\right]$  إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل f عدد حقيقى موجب تماما .

وكانت: 
$$L$$
 عدد 
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$
عدد حقيقي ثابت).

a نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليسار عند العدد الحقيقي a ويسمى العدد a العدد المشتق للدالة a على يسار العدد a

#### ملاحظة:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار العدد الحقيقى a.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a نقول أن f قابلة للاشتقاق عند

R المعرفة على f(x) = x |x| المعرفة على f(x) = x |x|

#### دراسة الاشتقاق عند 0:

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$$f(x) = x.(x) = x^2$$
 إذا كان  $x \ge 0$   
 $f(x) = x.(-x) = -x^2$  إذا كان  $x \le 0$ 

لدينا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (x) = 0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 0 والعدد المشتق على يمين 0 يساوى 0 .

ولدينا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 0 والعدد المشتق على يسار 0 يساوى 0 .

بها أن العدد المشتق على اليمين يساوى العدد المشتق على
 اليسار فإن f قابلة للاشتقاق عند 0.

R المعرفة على f(x) = x |x-1| المعرفة على f(x) = x |x-1|

#### دراسة الاشتقاق عند 1:

f كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :  $f(x) = x.(x-1) = x^2 - x$  إذا كان  $x \ge 1$   $f(x) = x.(-x+1) = -x^2 + x$  إذا كان  $x \le 1$   $f(x) = x.(-x+1) = -x^2 + x$  لدينا :  $f(x) = x.(-x+1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x-1}$  لدينا :

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x = 1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين f والعدد المشتق على يمين f يساوى f .

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -x = -1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 1 والعدد المشتق على يسار 1 يساوى : 1 .

بها أن العدد المشتق على اليمين لا يساوى العدد المشتق على اليسار فإن f غير قابلة للاشتقاق عند f .

#### \*الدالة المشتقة:

تعریف: f دالة معرفة علی مجال مفتوح I من R . إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقیقی X من I نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق علی المجال I . وتسمی الدالة التي ترفق بكل عدد  $X_0$  من  $X_0$  العدد المشتق وتسمی الدالة المشتقة الأولی للدالة  $X_0$  ونرمز لها بالرمز  $X_0$  .  $X_0$ 

وإذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة هي f وتسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f وهكذا نسمي الدوال f , f

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على R.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها.
- الدوال الصماء قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها.
  - الدوال المثلثية من الشكل : (ax+b) الدوال المثلثية من الشكل :  $x\mapsto \sin\left(ax+b\right)$  عددان حقيقيان  $x\mapsto \cos\left(ax+b\right)$  ثابتان ) قابلة للاشتقاق على  $x\mapsto \cos\left(ax+b\right)$

#### \*جدول مشتقات دوال مألوفة:

| f(x)                                | f'(x)                 | مجال قابلية الاشتقاق |
|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| الم عدد ا                           | 0                     | ]- ∞;+∞[             |
| حقیقی<br>( ثابت )                   |                       |                      |
| x                                   | 1                     | ]- ∞;+∞[             |
| n عدد طبيعي<br>و 2 ≥ x <sup>n</sup> | $n.x^{n-1}$           | ]- ∞;+∞[             |
| $\frac{1}{x}$                       | $-\frac{1}{x^2}$      | ]0;+∞[ أو ]∞;0[      |
| $\sqrt{x}$                          | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | ]0;+∞[               |
| $\sin x$                            | $\cos x$              | ]- ∞;+∞[             |
| cos x                               | $-\sin x$             | ]- ∞;+∞[             |

\*العمليات على المشتقات: ( الجمع ، الجداء ، النسبة )

و V دالتان قابلتان الاشتقاق على مجال I و  $\alpha$  عدد حقيقي ثابت .

| الدالة        | الدالة المشتقة          |
|---------------|-------------------------|
| U+V           | U'+V'                   |
| $U \times V$  | U'.V + V'.U             |
| α.U           | $\alpha . U'$           |
| $\frac{U}{V}$ | $\frac{U'V - V'U}{V^2}$ |
| $\frac{1}{U}$ | $\frac{-U'}{U^2}$       |

#### أمثلة

I عين مشتقة كل دالة من الدوال التالية المعرفة على المجال I في كل حالة :

$$I = ]0; +\infty[ f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + \frac{2}{3} ]$$

$$I = ]0; +\infty[$$
,  $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$  (2)

$$I = ]2; +\infty[$$
,  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$  (3)

$$I = ]-\infty; 2[ f(x)=1-2x+\frac{3}{5x-10}(4)]$$

#### الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على  $]0;+\infty$  ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{2} (4x^3) - 3(2x) - 5(1) + 0 = 2x^3 - 6x - 5$$

$$]0;+\infty[$$
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $f$ 

$$f'(x) = (2x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1)$$
$$= \frac{2x\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} + x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على  $]\infty+,2$  ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 4) - 2x(2x - 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على  $]2;\infty-[$  ولدينا:

$$f'(x) = -2 - \frac{3(5)}{(5x-10)^2} = -2 - \frac{15}{(5x-10)^2}$$

#### مشتقة دالة مركبة:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال J و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال J حيث من أجل كل عدد

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا :

$$f'(x) = V'(x) \times U'(V(x)) = 2\cos(2x-3)$$

$$f(x) = (2x-3)^5 : \underline{02}$$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب دالتين  $U\circ V$  حيث :  $U(x)=x^5$  . ( R قابلة للاشتقاق على  $U(x)=x^5$ 

$$U'(x) = 5x^4$$
:

 $\cdot$  ( R فابلة للاشتقاق على V(x) = 2x - 3

$$V'(x) = 2 : 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا:

$$f'(x) = V'(x) \times U'(V(x)) = 2 \times 5 (2x - 3)^4$$
  
=  $10 (2x - 3)^4$ 

$$\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$
 (1  $\frac{1}{2\sqrt{U}}$ 

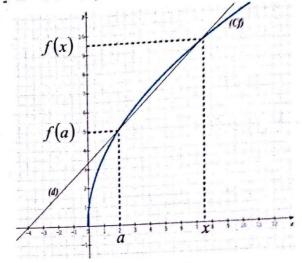
$$(U)^n = n.U'.U^{n-1}$$
 (2)

$$(\sin(ax+b))' = a.\cos(ax+b) (3$$

$$(\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b)$$
 (4

# التفسير الهندسي للعدد المشتق و معادلة الماس:

. دالة معرفة على مجال I من R و  $\left(C_f
ight)$  تمثيلها البياني f



. a من  $\left(C_{f}
ight)$  ذات الفاصلة في لتكن النقطة  $_{.}\left(C_{f}
ight)$  نقطة متغيرة من  $M\left(x;f\left(x
ight)
ight)$  نقطة متغيرة من

 $M_0$  ننشئ المستقيم  $M_0$  الذي يشمل النقطتين و  $M_0$ نحسب معامل توجيه (ميل)المستقيم (d) باستعمال  $M_0$  النقطتين  $M_0$  و

 $\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} : (d)$  معامل توجیه المستقیم نام انه: نلاحظ أنه:

f(a) يؤول لـ f(x) يؤول لـ f(x) يؤول لـ f(a)

 $M_{\,0}$  ومنه فإن : النقطة M تقترب من النقطة

وهكذا فإن المستقيم (d) يكون مماساً لـ  $(C_f)$  عند النقطة

 $\alpha = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  : معامل توجيهه  $M_0$ ملاحظات:

lpha=f'(a): إذا كان lpha عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإنlphaa يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة  $(C_f)$ نقول أن  $y = f'(a).x + \beta$  : أي  $y = \alpha.x + \beta$  : معادلته وبها أن النقطة  $M_{\,0}$  تنتمي للمهاس فإن إحداثياتها تحقق  $f(x_0) = f'(a)a + \beta$  : معادلة الماس ومنه  $\beta = f(x_0) - a.f'(a) : \emptyset$ 

بتعویض قیمة  $\beta$  في المعادلة  $y = f'(a).x + \beta$  نحصل y = f'(a)(x - a) + f(a): a = -1

 $\alpha$  إذا كانت  $\alpha = 0$  فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند و وراك يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a موازى  $(C_f)$ لمحورا لفواصل.

#### • إذا كانت:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{h} = \infty$$

ا الحانت: 
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L' \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

غير قابلة للاشتقاق عند a و  $(C_f)$  يقبل نصفي مماسين f. L ; L' النقطة ذات الفاصلة a معامل توجيههما

#### \* اتجاه تغير دالة:

. R دالة قابلة للاشتقاق على مجال f

إذا كانت f'(x) > 0 من أجل كل x من ألاالة وإذا كانت . I متزايدة تماما على f

(یمکن أن تکون f' منعدمة من أجل قیم منعزلة من f)

إذا كانت f'(x) < 0 من أجل كل x من أفإن الدالة • . Iمتناقصة تماما على f

( یمکن أن تکون f' منعدمة من أجل قیم منعزلة من f'f إذا كانت f'=0 من أجل كل x من f'=0 $.\ I$  ثابتة على

#### القيم الحدية المحلية:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من و f'(a)=0 : حيث R و a عدد حقيقي من Rغيرت f(a) : فإن a من إشارتها عند القيمة a

نال:

| قیم ۱۰ | -3 | 1    | 3 |
|--------|----|------|---|
| f'(x)  | +  | 0    | _ |
| f(x)   | /  | f(1) |   |

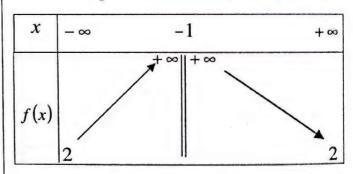
قيمة حدية محلية عظمى f(1)

| قيم X | -3 | 1      | 3 |
|-------|----|--------|---|
| f'(x) | +  | þ      |   |
| f(x)  |    | Y(1) ' |   |

قيمة حدية محلية صغرى f(1)

# تمارين

 $-\infty$  ;  $-1[\cup]-1$  ;  $+\infty[(C_f)]$  دالة عددية معرفة على fتمثيلها البياني و جدول تغيراتها معطى كما يلي:



1/ عين النهايات ثم فسر بيانيا كل نهاية.

2/ أجب بصحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي مع تبرير

 $(C_{f})$ مقارب له y=2 مقارب له أ- المستقيم ذو المعادلة

ب- المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا .

 $S=]-\infty;-1[$ هي f(x)>0 هي المتراجعة f(x)>0f(-2) > f(x): يكون ]-  $\infty$  ; - 1[ د- على المجال عندما يكون 2− > x .

 $A(C_f)$  تنتمي إلى A(-3;1) منامي الم

و-الدالة f زوجية.

#### حل التمريين 01 :

1/ تعيين النهايات ثم التفسير البياني:

 $\lim f(x) = 2 \quad \lim f(x) = 2$ 

(xx') فإن : y=2 مستقيم مقارب أفقى يوازي

 $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \int_{x \to -1}^{1} f(x) = +\infty$ 

(yy') فإن x = -1 فإن

2/ الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير:

 $(C_f)$  مقارب لـ y=2 مقارب لـ أ

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ : صحیح لأن

ب/ المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا .

 $R - \{-1\}$  من أجل كل x من f(x) > 2

 $S=]-\infty$ ; -1[هي f(x)>0 هي المتراجعة المتراجعة

خطأ لأن مجموعة حلول المتراجحة.

 $.S' = ]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[: \omega f(x) > 0]$ 

f(-2) > f(x): يكون -1[ على المجال

عندما يكون x < -2. صحيح لأن الدالة f متزايدة

تماما على المجال]1 - ; ∞ - [.

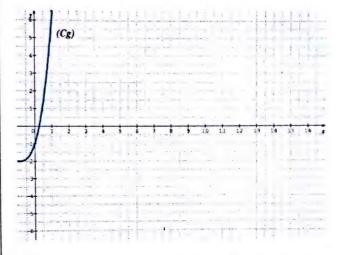
 $A(C_f)$  تنتمي إلى A(-3;1) مد/ النقطة

خطأ لأن القيمة الحدية الصغرى للدالة 2 و عليه فإنه مها يكن x من x فإن  $f(-3) \neq 0$  أي أن  $f(-3) \neq 0$  .  $f(1) \neq f(-1)$  . و  $f(1) \neq f(-1)$ 

# √ التمرين 02:

1/ المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال ]∞+, 1-[ كما يلي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$



g(0) وحدد g وحدد g وحدد g وحدد g وحدد و السارة  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  .

 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$  برا علل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $g(\alpha)=0$  يحقق  $g(\alpha)=0$ 

 $-1,+\infty$  على المجال g(x) على المجال ] $-1,+\infty$  .

 $[-1, +\infty[$  هي الدالة العددية المعرفة على المجال  $f(x) = \frac{x^2 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$  بيا يأتي :

 $(o,\vec{i},\vec{j})$  مثيلها البياني في معلم متعامد ( $\Gamma$ ) عثيلها البياني في معلم

اً/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، من المجال  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$  , ]-1 ,  $+\infty$ 

وفسر دون حساب:  $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$  و فسر النتيجة بيانيا.

 $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] \quad e \quad \lim_{x \to -1} f(x)$ 

و فسر النتيجتين بيانيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة  $(\Gamma)$  ثم أنشى  $(\Gamma)$ . (بأخذ  $0,26 \cong 0$ )

#### حل التمرين 02:

1) أ/ بقراءة بيانية تشكيل جدول تغيرات g:

$$\begin{array}{c|cccc}
x & -1 & & +\infty \\
g'(x) & & + & \\
\hline
g(x) & & +\infty
\end{array}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$
 و  $g(0) = -1$  :  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $g(0)$  عديد  $g(0) = -1$  :  $g(0) = 0$   $g(0) = 0$   $g(0) = 0$  حيث  $g(0) = 0$  لدينا  $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  و  $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ 

lpha حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد من  $\left[0,\frac{1}{2}\right]$  من  $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 

: g(x) جا تعيين إشارة

 $x \in ]-1$  ,  $\alpha[$  من أجل g(x) < 0

 $g(\alpha)=0$ و  $\alpha$ ,  $+\infty$  من أجل  $\alpha$ ,  $+\infty$  و  $\alpha$  و  $\alpha$  من أجل كل عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $\alpha$ . /2

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3} : ]-1, +\infty[$$

 $-1,+\infty$  لدينا الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال  $-1,+\infty$  و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

: ب
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$
 دون حساب

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha + 1)^3} = 0$$

تفسير النتيجة : [(۲) يقبل مماس يوازي محور الفواصل

ج/ حساب النهايتين:

عند النقطة ذات الفاصلة α.

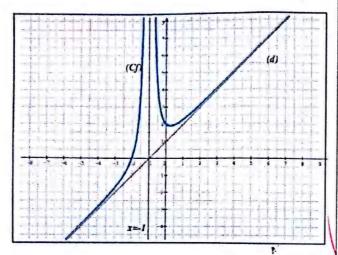
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \to 1 \\ (x+1)^2 \to 0^+ \end{cases} \quad \text{im } f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} - (x+1) \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

x = -1التفسير :  $(\Gamma)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته y = x + 1 عند x = -1 عند x = -1 معادلته y = x + 1 عند y = x + 1 د جدول تغیرات x = -1 :

$$\begin{array}{c|cccc}
x & -1 & \alpha & +\infty \\
f'(x) & - & + & \\
f(x) & +\infty & +\infty \\
f(\alpha) & & & & \\
\end{array}$$

 $\alpha \cong 0.26$   $f(\alpha) \cong 1.89$  بأخمذ  $(\Gamma)$ 



#### التمرين 03:

 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1 + 5}}{x^2 + 2x + 10} : \mu R : \mu R$ 

## حل التمرين 03:

 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{thing of } f(x) = \frac{1}{+\infty}$   $(4) \text{ Thing of } f(x) = \frac{1}{+\infty}$ 

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 5}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 5}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty} \int_{-\infty} \int_{-$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 5}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}}\right]}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}}}{x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 5}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x}}\right]}{x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{with the proof of the proof$$

 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$  (4)

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \infty$  حالة عدم تعيين من الشكل

 $a = 0 f(x) = \frac{\sin x}{x} (3)$   $a = \frac{\pi}{2} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x} - 2}{1} (4)$ 

#### حل التمرين 04:

h الدالة h(1) = 2 و  $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ : نضع (1  $1 \in \left]0,+\infty\right[$  و  $\left]0,+\infty\right[$  قابلة للاشتقاق على المجال المجال  $\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$ :  $h'(1) = \frac{5}{4}$ :  $h'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$ :  $\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 2}}{x - 1} = h'(1) = \frac{5}{4}$ h الدالة h(0) = 1 و  $h(x) = \sqrt{x+1}$  الدالة (2)  $0 \in ]-1,+\infty[$  و  $]-1,+\infty[$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]\infty+,1$  $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{0} = h'(0) : 0$  $h'(0) = \frac{1}{2}$  عيث:  $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$  $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 1 - 1}}{x} = h'(0) = \frac{1}{2}$ h الدالة h(0) = 0 و  $h(x) = \sin x$  (3)  $0 \in IR$  و IR قابلة للاشتقاق على المجال  $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x \to 0} = h'(0) : 0$ h'(0)=1: وعليه  $h'(x)=\cos x$ 

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}$   $= \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$   $= \lim_{x \to -\infty} - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - (-x) \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$   $= \lim_{x \to -\infty} x \left[ -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x + \frac{4}{x^2}} \right]$  = FI  $(-\infty \times 0)$   $= \lim_{x \to \infty} x \left[ -\cos(x) \right]$   $= \lim_{x \to \infty} x \left[ -\cos(x) \right]$ 

(طريقة العامل المشترك لا تنفعنا في هذا المثال ، نستعمل طريقة المرافق)

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - \sqrt{x^2 + 4}^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 + 4\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

#### التمرين 04:

باستعمال قابلية الاشتقاق أحسب نهايات الدوال التالية عندما ينتهي المتغير x إلى العدد الحقيقي a .

$$a=1$$
  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1}$  (1)

$$a = 0 f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} (2$$

تكتب عبارة f(x) على الشكل:

عداد حقیقیة ثابتة a,b,c حیث  $f(x) = a + \frac{bx+c}{r^2+1}$ 

- c الحسب f'(x) بدلالة المورى.
- 2) اعتهادا على جدول تغيرات الدالة f عين:

f أ- صورتي العددين f و f بالدالة

ب- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$  و فسر النتيجة بيانيا.

x ج-إشارة f(x) حسب قيم

f(x) د-عبارة الدالة

 $(C_f)$ نأخذ فيها يلي: c = 0 ، b = -3 ، a = 2 وليكن (3)

f المنحنى المثل للدالة

 $f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$  : أ-بين أن

.  $f^{l}(x)$  أدرس إشارة

f النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f

.  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  أي معلم متعامد متجانس  $(C_f)$ 

#### حل التمرين 05:

: f'(x) عبارة (1

: R من أجل كل x من أجل

$$f'(x) = 0 + \frac{b(x^2 + 1) - 2x(bx + c)}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{-bx^2 - 2cx + b}{(x^2 + 1)^2}$$

2) أ/ من خلال جدول التغيرات:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 :$$
و نلاحظ أن

$$h(x) = \sqrt{2 + 2\cos x} : \text{id}$$

IR الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال  $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$  $\frac{\pi}{2} \in IR$ 

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = h\left(\frac{\pi}{3}\right) : a.b.$$

$$h'(x) = \frac{-2\sin x}{2\sqrt{2 + 2\cos x}} :$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$
:  $\theta$ 

و نلاحظ أن:

$$h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
 الذي  $y = 2$ : معادلته  $y = 2$  معادلته  $\frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2 + 2\cos x} - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}$ 

#### التمرين 05:

لتكرأ دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على R لها جدول التغيرات التالى:

| x    | -∞ | -1            | 1             | +∞ |
|------|----|---------------|---------------|----|
| f(x) | 2  | $\frac{7}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2  |

$$f(-1) = \frac{7}{2}$$
  $f(1) = \frac{1}{2}$ 

f'(x) دراسة إشارة با

إشارة f'(x) من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب.

| قيم 🗴            | -∞ | -1 |   | 1 | +∞ |
|------------------|----|----|---|---|----|
| $3x^2 - 3$ إشارة | +  | 9  | - | 9 | +  |
| f'(x) إشارة      | +  | 9  | - | 9 | +  |

. f النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( 2 - \frac{3x}{x^2} \right) = 2 :$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( 2 - \frac{3x}{x^2} \right) = 2 \quad 9$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad f(-1) = \frac{7}{2} \quad 9$$

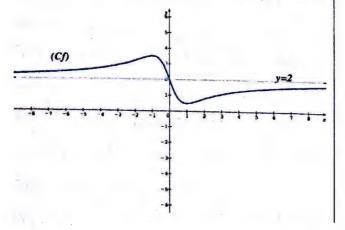
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2 \end{cases}$$
: (\Delta) د) تعيين نقط تقاطع  $(C_f)$  و المستقيم

$$2 - \frac{3x}{x^2 + 1} = 2$$
: معناه  $f(x) = 2$ 

$$x=0$$
: ومنه  $=0$ 

$$(C_f) \cap [y=2] = \{(0;2)\}$$
 : معناه

 $(C_f)$  وإنشاء



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \int_{x \to +\infty}^{\infty} f(x) = 2 /(-1)$$

ومنه : 
$$\binom{C_f}{y}$$
 يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y=2$  بجوار  $\infty$  .  $-\infty$ 

$$: f(x)$$
 جرا إشارة

من خلال جدول تغیرات f نستنتج:

| قيم 🗴      | -∞ | + ∞ |
|------------|----|-----|
| f(x) إشارة | +  |     |

د/ عبارة الدالة f

$$a + \frac{-b+c}{2} = \frac{7}{2}$$
 if  $f(-1) = \frac{7}{2}$ .

$$2a-b+c=7$$
 i

$$a + \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}$$
 if  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

$$2a+b+c=1$$

. 
$$c = 0$$
 أي  $b + 2c + b = 0$  أي  $f'(-1) = 0$ 

بتعويض قيمة 
$$c=0$$
 في المعادلات (1) و (2) نجد:

. 
$$a=2$$
 ومنه  $4a=8$  : بالجمع نجد  $\begin{cases} 2a-b=7 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ 

$$a + b = -3$$
 نجد  $a + b = 1$  نجد  $a + b = 1$ 

$$f(x) = 2 - \frac{3x}{x^2 + 1}$$
:

$$f(x) = 2 - \frac{3x}{x^2 + 1}$$
: ا/ لدينا (3

$$f'(x) = 0 - \frac{3(x^2 + 1) - 2x(3x)}{x^2 + 1}$$
$$= -\frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

دالة عددية معرفة على 
$$IR - \{-1\}$$
 كما يلي: 
$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

و يرمز بـ  $(C_f)$  إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; i; \vec{j})$ . عين الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث يكون من أجل ( $\widetilde{1}$  (I  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ ; :  $IR - \{-1\}$  کل x من . أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها $^{\prime}$ (3) ثبت أن المنحني (Cr) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلته.

> y = x - 1 الذي معادلته ( $\Delta$ ) الذي أثبت أن المستقيم (4 مستقيم مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$ .

 $^{
m V}$  أدرس وضعية المنحنى  $\left(C_f
ight)$  بالنسبة للمستقيم ( $^{
m V}$ ).

f' من x من أجل كل x من أرا ( II )

هي الدالة المشتقة  $IR - \{1\}$ :  $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ f illuli

2) عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل

ا كتب معادلة الماس (D) للمنحني ( $C_f$ ) عند النقطة ذات (3 الفاصلة 0.

انبت أن النقطة A(-1;-2) هي مركز تناظر A(III) $(C_f)$ للمنحنى

 $(C_f)$  و (D) و  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ 

y=x-1 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : 4 إثبات أن المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته 3. حلان مختلفان f(x) = m

#### حل التمرين 06:

: عيين الأعداد الحقيقية c.b.a حيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + bx + ax + b + c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + (b+a)x + b + c}{x+1}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b+a = 0 ; b = -1 \\ b+c = 3 ; c = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = x-1 + \frac{4}{x+1}$$

$$e^{-ax+1}$$

f على أطراف مجموعة تعريف f

$$D_f = ]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = +\infty \quad 0$$

 $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \text{ (liming)} \rightarrow 4 \rightarrow 0^+ \text{)}$ 

 $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \text{(hund)} \to 4 \to 0^-$ 

(3) إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيها مقاربا موازيا

 $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty : \text{Liu}: \text{Liu}$ 

و عليه فإن  $(C_f)$  يقبل مستقيها مقاربا موازيا لمحور التراتيب

x = -1 axis

مستقيم مقارب مائل:

| قيم ٢.       | -∞ | - | -3  | -1 | 1 | +∞ |
|--------------|----|---|-----|----|---|----|
| إشارة (x-1)  | _  |   | -   | -  | þ | +  |
| إشارة x+3    | -  | < | ) + | +  |   | +  |
| إشارة (x+1)² | +  |   | + ( | +  |   | +  |
| f'(x) إشارة  | +  |   | ) - | -  | 0 | +  |

 $x \in ]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$  متزایدة لما  $f: \infty$  متزایدة لما  $x \in [-3;-1[\cup]-1;+1]$  متناقصة لما

fجدول تغیرات :

| x     | -∞ | -3                   | -1  |   | 1 | +∞  |
|-------|----|----------------------|-----|---|---|-----|
| f'(x) | +  | <b>\rightarrow</b> - |     | - | Ò | +   |
| f(x)  | /  | <del>-</del> 6<br>▼  | + 0 | ~ |   | +80 |

 $(C_f)$  اثبات أن النقطة  $(A_f) = A(-1;-2)$  هي مركز تناظر للمنحنى A(-1;-2) : A(-1;-2) مركز تناظر لـ A(-1;-2)

$$(2(-1)-x)\in D_f$$
 فإن  $x\in D_f$  من أجل كل  $x\in D_f$  فإن •

$$f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$$
 •
 $x \in IR - \{-1\}: x \in D_f$  للينا من أجل كل  $x \neq -1:$  أي  $x \neq -1:$  فإن:  $1 \neq -2-x \neq -1:$  أي  $1 \neq -2-x \neq -1:$  أي  $1 \neq -2-x \neq -1:$ 

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{|x| \to +\infty} x - 1 - \frac{4}{x+1} - (x-1)$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{4}{x+1} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$-\infty$$
 و منه  $(\Delta)$  بجوار  $\infty+$  و منه  $(\Delta)$  مستقیم مقارب له  $(C_f)$  بالنسبة للمستقیم  $(\Delta)$  دراسة وضعیة المنحنی  $(C_f)$  بالنسبة للمستقیم  $(\Delta)$  ندرس إشارة الفرق  $f(x)-y=rac{4}{x+1}$ 

| x قيم                   | -∞  | -1 |     | +∞ |
|-------------------------|-----|----|-----|----|
| إشارة x+1               | _   | 0  | +   |    |
| f(x)-y إشارة            | _   |    | +   |    |
| وضعية (C <sub>r</sub> ) | تحت |    | فوق |    |
| بالنسبة لـ (۵)          |     |    |     |    |

: 
$$IR - \{1\}$$
 إثبات أنه من أجل كل  $x$  من  $(1 (II))$ 

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

لدينا f قابلة للاشتقاق على  $IR - \{1\}$  و :

$$f'(x) = \frac{(2x)(x+1) - (1)(x^2 + 3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

f'(x) ندرس إشارة (2

لدينا:

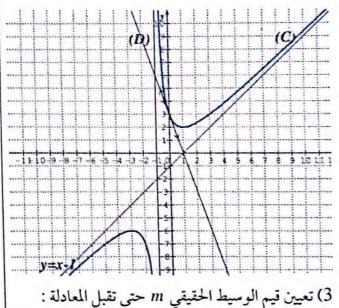
$$f(-2-x)+f(x) = \frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1} + \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$= \frac{4+4x+x^2+3}{-x-1} + \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$= \frac{-4x-4}{x+1}$$

$$= \frac{-4(x+1)}{x+1} = -4$$

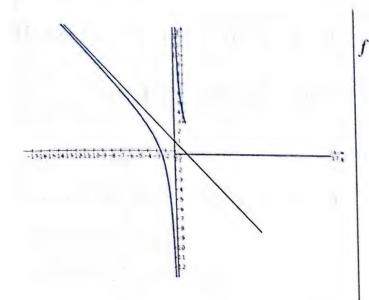
$$(C_f) \int_{0}^{\infty} A(-1;-2) \int_{0}^{\infty} A(-1;-2)$$



حلان مختلفان (بیانیا) : f(x) = m حلول المعادلة f(x) = m بیانیا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنی  $C_f$  مع المستقیم الموازي لمحور الفواصل الذي معادلته f(x) = m ومنه: تقبل المعادلة f(x) = m حلان معادلته f(x) = m . f(x) = m .

## ر التعرين 07:

و دالة معرفة على  $f = -\infty; -1[U] - 1;0[-1;0]$  دالة معرفة على  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$  منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كها هو مبين في الشكل .



 أ/ أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.
 ب/ بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

/ أحسب نهاية g عند ∞+.

و متجانس.

 $(\Delta)$  يقبل مستقيها مقاربا مائلا  $(C_{_{S}})$  بنا بنايد بنايد بنايد بالم

عند ∞+ يطلب تعيين معادلته.

ج/ أدرس تغيرات g .

 $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$ : کہا یلی  $R - \{-1\}$  کہا دالة معرفة علی k

 $\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \longrightarrow 1$ (1)

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

كتب معادلتي المهاسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي (2)

فاصلتها () .

.  $(C_k)$   $_2(\Delta_2)$   $_2(\Delta_1)$   $_3(3)$ 

#### حل التمرين 07:

: معرفة على: 
$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1} / (1)$$
 معرفة على:  $-\infty; -1[\bigcup -1;0[$ 

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left( -x + \frac{4}{x+1} \right) = 4$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$

: f الدالة f

| x قيم |          | -1 ( |
|-------|----------|------|
| f'(x) | -        | -    |
| f(x)  | -∞<br>+∞ | + ∞  |

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$
 كما يلي:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ 

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty / 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{4}{x+1} \right) = 0$$
 و  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$  : ب/ لدينا

$$\left(C_{g}\right)$$
 معادلة مستقيم مقارب مائل لـ  $y=x$  : بجوار  $y=x$  . بجوار

 $[0;+\infty[$  : المجال المجال عدد حقيقي من المجال المجال

$$g'(x) = 1 + \frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

إشارة g'(x) من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. جدول إشارة g'(x):

| قیم x       | 0 | 1 |   | +∞ |
|-------------|---|---|---|----|
| x-1         | - | þ | + |    |
| x+3         | + |   | + |    |
| g'(x):إشارة | - |   | + |    |

جدول تغيرات 8:

| x قيم | 0 |   | 1          |   |   | +∞  |
|-------|---|---|------------|---|---|-----|
| g'(x) | 1 | - | þ          |   | + | +∞  |
| g(x)  | 4 | \ | <b>*</b> 3 | _ |   | τω. |

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$
 : كما يلي  $R - \{-1\}$  كما يلي  $k \ 2$ 

$$: \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} - \int (1)^{h} (1)^{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-3)}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 3}{h+1} = -3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-3)}{h}$$

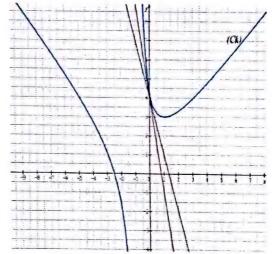
$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-5)}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h-5}{h(h+1)} = -5$$

 $\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} : ih$  . 0 : ih . 0 : ih



#### التمرين 08:

: لتكن الدالة f المعرفة على  $R - \{0\}$  كما يلي

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{3x^2}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

0 أحسب نهايات الدالة f عند  $\infty$  + و  $\infty$  - و (1

ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مقاربين أحدهما مائل معادلته.

$$y = \frac{1}{3}x$$

: ناب من أجل كل x من أجل فإن (2

 $f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$  ثم أدرس تغيرات الدالة

وشكل جدول تغيراتها.

lpha بين أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $rac{1}{4} < lpha < rac{1}{3}$  : حيث

انشئ  $(C_f)$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  و متجانس

g(x) = |f(x)| : حيث g لتكن الدالة g

أ/ أكتب عبارة g(x) بدون رمز القيمة المطلقة .

g كيف يتم رسم المنحنى (Cg) الممثل للدالة (Cg) باستعمال المنحنى (Cf) علل ثم أنشئ (Cg).

h(x) = f(|x|): حيث h لتكن الدالة h

. دالة زوجية h دالة زوجية

ب كيف يتم رسم المنحنى (Ch) الممثل للدالة h باستعمال المنحنى (Cf) علل ثم أنشئ (Ch).

#### حل التمرين 08:

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ 

$$\lim_{\stackrel{\longrightarrow}{x\to 0}} f(x) = -\infty \ \ _{\mathfrak{I}}$$

و عليه فإن  $(C_f)$  يقبل مستقيا  $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ 

x = 0 مقاربا موازیا لمحور التراتیب معادلته

إثبات أن المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = \frac{1}{3}x$  مستقيم الذي معادلته  $y = \frac{1}{3}$  مستقيم مقارب ماثل :

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{3x^2} - \frac{1}{3}x = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{3x - 1}{3x^2} = 0$$

ومنه (۵) مستقيم مقارب له (C<sub>f</sub>) بجوار ∞+ و <sup>∞۰۰</sup>

| جدول تغیرات *f* :

| х     | - ∞ | -2 | (   |   | 1  |          | +∞             |
|-------|-----|----|-----|---|----|----------|----------------|
| f'(x) | +   | 0  | -   | + | Q  | +        |                |
| f(x)  |     | +• | - 8 |   | ×1 | <b>/</b> | $-\frac{5}{4}$ |

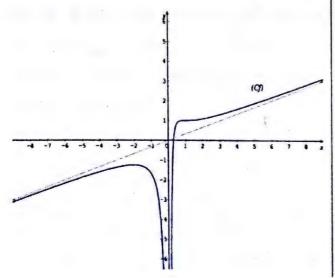
$$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$$
 لدينا  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $f\left(\frac{1}{4}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ 

lphaحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد

$$f(\alpha) = 0$$
: حيث  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ 

lpha أي ( $C_f$ ) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها .  $rac{1}{4} < lpha < rac{1}{3}$  : حيث

 $:(C_f)$  انشاء (4



 $(\Delta)$  بالنسبة للمستقيم ( $(C_f)$ ) بالنسبة للمستقيم ( $(C_f)$ ): يرس إشارة الفرق:  $f(x)-y=\frac{3x-1}{3x^2}$ 

| <i>x</i> قيم                    | -∞ ( | ) 1/ | 3 +0   |
|---------------------------------|------|------|--|
| إشارة 1 – 3 <i>x</i>            |      | - (  | discover Depth and   |
| إشارة f(x)-y                    | -    | Also | COLUMN TO THE PARTY OF THE PART |
| $(\Delta)$ بالنسبة لـ $(C_{f})$ | نخت  | نخت  | نوق [  |

 $f'(x) = \frac{(3x^2 + 3)(3x^2) - (6x)(x^3 + 3x - 1)}{(3x^2)^2}$   $= \frac{9x^4 + 9x^2 - 6x^4 - 18x^2 + 6x}{9x^4}$   $= \frac{3x^4 - 9x^2 + 6x}{9x^4}$   $= \frac{3x^3 - 3x + 2}{3x^3} = \frac{(x + 2)(x - 1)^2}{3x^3}$ 

: f'(x) ندرس إشارة

| قيم X                 | - ∞ | -2  | 0 1                   | ÷ ∞ |
|-----------------------|-----|-----|-----------------------|-----|
| $(x-1)^2$ إشارة       | +   | A A | +0                    | +   |
| إشارة x+2             | -   | 0 + | A Title of the second | +   |
| إشارة <sup>3</sup> x³ | -   | - ( | O +                   | ÷   |
| إشارة (x) f           | +   | 0 - | +0                    | +   |

 $]-\infty;-2]$  [0;+∞ ومنه: f متزايدة على المجالات  $x \in [-2;0]$  لا متناقصة لما

g(x) = |f(x)| : حيث g لتكن الدالة g حيث g(x) بدون رمز القيمة المطلقة f

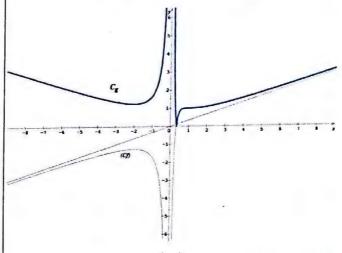
 $x \in [\alpha; +\infty[$  ای  $f(x) \ge 0$  اذا کان g(x) = f(x)

$$f(x) \le 0$$
 اِذَا كَانَ  $g(x) = -f(x)$  و  
 $f(x) \le 0$  اِذَا كَانَ  $g(x) = -f(x)$  أي  $g(x) = -f(x)$  أي  $g(x) = -f(x)$  أي

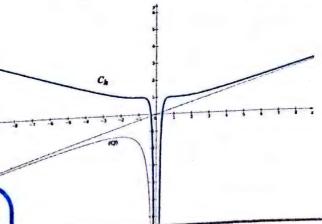
 $x \in [\alpha; +\infty[$  لا (Cf) ينطبق على (Cg) بنطبق على الم

(Cg) هو نظير (Cf) بالنسبة لمحور الفواصل لما

:(Cg) إنشاء  $x \in ]-\infty; 0[\cup]0;\alpha]$ 



h(x) = f(|x|): حيث h حيث h لتكن الدالة h حيث h حيث h لتكن الدالة h دالة زوجية h من أجل كل h من h دالة زوجية  $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x) - x \in R - \{0\}$  فإن h ينطبق على h(x) = h(x) ينطبق على h(x) = f(x) لأن h(x) = f(x) وبها أن h دالة زوجية فإن h(x) = f(x) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.



#### التمرين 09

 $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$  دالة معرفة على المجال ]1;+∞[ بالمجال f

1) أدرس تغيرات الدالة 
$$f$$
 ثم أنشئ جدول تغيراتها .

2) برهن أن المعادلة 
$$f(x)=0$$
 تقبل حلا وحيدا  $\infty$  2  $\infty$  ] 1;2[

#### حل التمرين 09:

$$\lim_{\stackrel{>}{x \to 1}} f(x) = +\infty : \text{constant}$$
 (1)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty \quad 9$$

f بجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $]0;+\infty[$  إذن: f قابلة للاشتقاق على  $]\infty+;1[$ 

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1 \times \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

f'(x)(0:] 1;+∞ [ من أجل كل من x من أجل كل من

] 1;+∞ متناقصة على المجال f

جدول التغيرات:

| x قيم | 1  | +∞ |
|-------|----|----|
| f'(x) |    | -  |
| f(x)  | +∞ |    |
|       |    | -∞ |

[1;2] مستمرة على [1;2] و متناقصة تماما على [2;1] و [1;2] مستمرة على [2;1] و [1;2] و متناقصة تماما على [1;2] ومتناقصة تماما على [1;2] ومتناقصة تماما على [1;2] ومتناقصة تماما على [1;2]

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد

 $f(\alpha) = 0$  يعقق [1;2] من المجال

#### 10 المرابي

f and f are f and f and f and f are f and f and f are f and f and f are f are f and f are f and f are f are f and f are f are f and f are f and f are f and f are f and f are f are f and f are f and f are f and f are f are f and f are f and f are f are f and f are f are f are f are f and f are f and f are f and f are f are f are f are f are f and f are f are f are f and f are f a

نسمي (C) منحاها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (c;i;j) .

1) احسب نهايات الدالة f عند صور ٠٠٠٠ ا

ين أن المستقيم ذو المعادلة 2x+3=y مقارب للمنحنى (2) ين

(C) بجوار ٠٠٠٠ .

3) مل / قابلة للاشتقاق عند 0 ؟ 4-9

 $x \in D_f - \{0; -4\}$  من أجل f'(x) ------ (4

(C) إنشئ جدول تغيرات الدالة / ثم للمنحني (C).

#### حل التمرين 10:

1) حعت من الشكل:

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = -\infty + \infty$ 

 $\lim_{x \to \infty} \left( x + 1\sqrt{x^2 + 4x} \right) \times \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$   $= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2 - 4x}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$ 

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+1}{x+1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$$
$$-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)$$

 $= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right)} = -1$ 

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$ 

 $\lim_{x\to +\infty} \left[ f(x) - (2x+3) \right]$ 

 $= \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 2x - 3$ 

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x+2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4x} - (x+2) \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{x^2 + 4x + x + 2}}{\int_{x^2 + 4x + (x + 2)}} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة x = 2x + 3 مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار  $\infty+$ .

(3) لا يمكن له / أن تكون قابلة للاشتقاق عند ( الأنها ليست معرفة على يسار ().

لا يمكن لـ / أن تكون قابلة للاشتقاق عند 4- لأنها ليست معرفة على يمين 4-

:  $x \in D_f - \{0; -4\}$  من أجل (4

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$$

x+2>0: لدينا ]0;+∞ على المجال ]3;+∞ لدينا (5

$$f'(x) > 0$$
 إذن:  $0 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x}} > 0$ 

 $f'(x) \ge 0$  على المجال ] $-\infty$ , -4[ لدينا: 0

$$1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x}} \ge 0 \iff 1 \ge -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \ge \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x} \iff 1 \ge \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right)^2$$

 $x \in ]-\infty, -4$  لأن الطرفين موجبين لما

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x \ge x^2 + 4x + 4$$

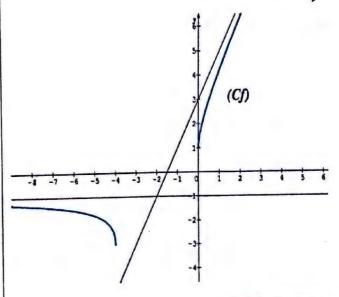
مستحيل. 4≤0⇔

 $f'(x) \ge 0$  إذن على المجال  $-\infty$ , -4 [ لا يمكن أن يكون  $-\infty$ , -4 أي f'(x) < 0 .

#### f منه جدول تغیرات الداله

| x قيم | - ∞ | -4  | 1 | +∞ |
|-------|-----|-----|---|----|
| f'(x) | -   | 1// |   | +  |
| f(x)  | -1  | -3  |   | +∞ |

#### الإنشاء:



#### التمرين 11:

f دالة معرفة على [0;1]بـ:  $\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$  نسمي f دالة معرفة على f إ[0;1]بـ نسمي ألى معلم متعامد ومتجانس  $(o;\vec{i};\vec{j})$ منحاها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(o;\vec{i};\vec{j})$ مل الدالة f قابلة للإشتقاق عند f

- (2)ادرس تغیرات الدالة f وشکل جدول تغیراتها .
- 3)أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2
  - (C)أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C)

#### حل التمرين 11:

1)الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن: f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2) معرفة وقابلة للاشتقاق على ]1;0[ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$=\frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$
 ومنه:  $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$  إذن  $x > 0$  أن  $0$ 

x > 0: لأن 3 - 2x إذن إشارة f'(x) على g(x) = 10 هي إشارة الله وأدن إ

$$f'(x)$$
 و  $(1-x)^2$  منه جدول إشارة  $(1-x)^2$  و  $(1-x)^2$ 

| قيم ٢.   | 0 | 1 |
|----------|---|---|
| f'(x)iml | + |   |

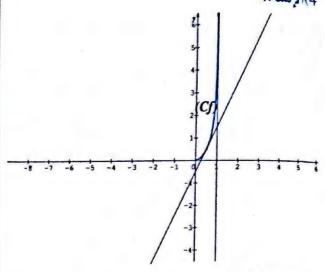
 $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty : [0;1] \text{ als } f \text{ all limits}$ 

| قيم 🗴 🕙 | 0 1 |
|---------|-----|
| f'(x)   | +   |
| f(x)    | +∞  |
|         | 0   |

(3) معادلة المياس (1) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب  $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$  من الشكل  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{1/2}} = \frac{1}{2(1/4)}\sqrt{1} = 2$ 

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1/8}{1/2}} = \sqrt{1/4} = 1/2$$

 $y = 2x - \frac{1}{2}$ :  $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$  : (T) منه معادلة (T)



#### التمرين 12:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$  إلى معلم متعامد ومتجانس f(i; j)

1) عين  $D_f$  ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف المفتوحة واستنتج معادلات المستقيات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$ 

2) أدرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة الماس ( $\Delta$ ) للمنحنى ( $C_f$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 5.

 $(C_f)$  أثبت أن المستقيم x=1 محور تناظر للمنحنى (4)

نعتبر الدالة  $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$  حيث ( m وسيط

.  $f_m$  ونرمز لـ  $(C_m)$  إلى المنحنى الممثل للدالة

ا اوجد  $D_{f_m}$  عموعة تعريف الدالة (1

 $f(x)=1-rac{12}{x^2-mx-3}:x\in D_{f_m}$  كن أجل كل أو 2 أنه من أجل كل أو 2 أنه من أجل كل أو 2 أنه من أحسب النهايات للدالة f على الأطراف المفتوحة ل

 $. f_m$  أدرس تغيرات الدالة (3

( $C_m$ ) بين أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي لكل المنحنيات ( $C_m$ ). ( $C_m$ ) ماهو المنحنى ( $C_m$ ) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيات ( $C_m$ ). ( $C_f$ ) أنشئ ( $C_f$ ).

#### حل التمريين 12:

:  $x_2 = 3$   $x_1 = -1$   $x_2 = 3$   $x_2 = 3$   $x_3 = 3$   $x_4 = 3$   $x_2 = 3$   $x_4 = 3$   $x_4$ 

 $(x^{2}-2x-3\to 0^{+}; x^{2}-2x-15\to -12) \lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$  $(x^{2}-2x-3\to 0^{-}; x^{2}-2x-15\to -12) \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ 

ومنه  $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل x = -1

 $\lim_{x \xrightarrow{\epsilon} 3} f(x) = +\infty$ 

 $(x^2 - 2x - 3 \to 0^- ; x^2 - 2x - 15 \to -12)$ 

 $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$ 

 $(x^2-2x-3\to 0^+; x^2-2x-15\to -12)$ 

ومنه ( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته x=3

 $x \in D_f$  کل خراسة تغیرات f'(x) عبارة (2) دراسة تغیرات

 $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$ 

 $=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3-x^2+2x+15)}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$ 

إشارة (f'(x)

| قيم ٢.      |   | -1 | 1 | 3 | +∞ |
|-------------|---|----|---|---|----|
| إشارة f'(x) | - | -  | 0 | + | +  |

وعليه f متزايدة على المجالات [1;3] و  $]\infty+$ ;3 و f متناقصة على المجالات  $]1-;\infty-$  و [1;1-]. جدول تغيرات f:

| قيم ٢. |   | 1 1                           | 3   | +∞       |
|--------|---|-------------------------------|-----|----------|
| f'(x)  | - | - 0 +                         | +   |          |
| f(x)   | 1 | + <sup>∞</sup> / <sub>4</sub> | - & | <b>1</b> |

3) معادلة الماس (△):

$$f(5) = 0$$
  $f'(5) = \frac{2}{3}$   $y = f'(5)(x-5) + f(5)$ 

عند النقطة  $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$  عند النقطة  $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$  عند النقطة ذات الفاصلة 5.

 $(C_f)$  غور تناظر لـ x=1 اثبات أن المستقيم x=1 غور  $x\in D_f$  فإن  $x\in D_f$  ليكن

$$f(2-x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) - 15}{(2-x)^2 - 2(2-x) - 3} : \text{eta}$$

$$= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 15}{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 3}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = f(x)$$

. ( $C_f$ ) عور تناظر لـ x=1 عور تناظر لـ ( $C_f$ ) .

$$\Delta = m^2 + 12 > 0$$
 ،  $x^2 - mx - 3 \neq 0$  : معرفة إذا كان  $f_m$  (12)

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$$
  $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2}}{2}$ :

$$D_{f_{\infty}} = \left] - \infty; x_1[\bigcup]v_1; x_2[\bigcup]v_2; + \infty\right[$$

$$f_m(x) = 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3}$$
 (2)

$$1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = \frac{x^2 - mx - 3 - 12}{x^2 - mx - 3} = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = f_m(x)$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{this limits}$$

$$\lim_{x \to x_1} f_m(x) = \lim_{x \to x_1} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = -\infty$$

$$\left(x^2 - mx - 3 \to 0^-\right) : 0$$

$$\lim_{x \to -x_{1}} f_{m}(x) = \lim_{x \to -x_{1}} 1 - \frac{12}{x^{2} - mx - 3} = +\infty$$

$$(x^{2} - mx - 3 \to 0^{+}) : \forall y$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$(x^2 - mx - 3 \to 0^-) : \forall x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to x_2} f_m(x) = \lim_{x \to x_2} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$\left(x^2 - mx - 3 \to 0^+\right) : 0$$

: 
$$f_m$$
 دراسة تغيرات (3

$$f_m'(x) = \left(1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3}\right) = 12 \cdot \frac{2x - m}{\left(x^2 - mx - 3\right)^2}$$

: f'm إشارة

| نیم x           | - ∞ | $x_1 = \frac{m}{2} - x_1$ | 2 +∞ |
|-----------------|-----|---------------------------|------|
| $f'_m(x)$ إشارة | -   | - 0 +                     | +    |

وعليه 
$$\int \frac{x}{2};+\infty$$
 و $\left[\frac{m}{2};x_2\right]$  تالجالات  $\int \frac{m}{2};x_2$  و  $\left[\frac{m}{2};x_2\right]$  متناقصة على المجالات  $\left[x_1;\frac{m}{2}\right]$  و  $\left[x_1;\frac{m}{2}\right]$ 

:  $f_m$  تغيرات حدول تغيرات

| قیم x     | -∞ | $x_1 \frac{m}{2}$  | <i>x</i> <sub>2</sub> | +∞ |
|-----------|----|--------------------|-----------------------|----|
| $f'_m(x)$ | -  | - 9                | +                     | +  |
| $f_m(x)$  | 1  | $f_m(\frac{m}{2})$ | + ∞                   | 1  |

4) إثبات وجود نقطة ثابتة تنتمى لكل المنحنيات $(C_m)$  لتكن  $y_0 = \frac{x_0^2 - mx_0 - 15}{x_0^2 - mx_0 - 3} \quad (C_m)$  as  $M_0(x_0; y_0)$ 

$$y_0 x_0^2 - m y_0 x_0 - 3 y_0 = x_0^2 - m x_0 - 15$$

$$m(-y_0 x_0 + x_0) + y_0 x_0^2 - 3 y_0 - x_0^2 + 15 = 0 \ m \in R$$
(من أجل كل

$$\begin{cases} -y_0x_0 + x_0 = 0.....(1) \\ y_0x_0^2 - 3y_0 - x_0^2 + 15 = 0......(2) \end{cases} : i \downarrow$$

$$y_0 = 1$$
  $x_0 = 0$   $x_0 = 0$ 

$$y_0=1$$
 نعوض  $y_0=5$ : نجد (2) نجد نعوض  $x_0=0$  ونعوض  $x_0^2-x_0^2+12=0$  نجد: (2) نجد

$$M_0(0;5)$$
 : ومنه (حلول). ومنه

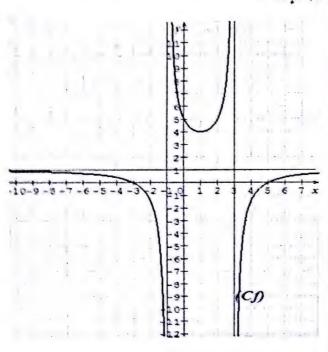
 $(C_m)$  تعيين m بحيث النقطة (4:1) تنتمى للمنحنى m

$$4 = \frac{-m-14}{-m-2} : 4 = \frac{(1)^2 - m(1) - 15}{(1)^2 - m(1) - 3}$$

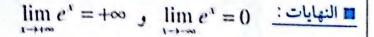
$$m=2$$
 ومنه  $-3m=-6$  ومنه  $-4m-8=-m-14$ 

فالمنحنى الذي يشمل النقطة (4:1) هو المنحنى ( $C_2$ ).

6) الإنشاء:



# الدوال الأسية واللوغاريتمية



$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

#### المرين لتطبيقي

 $f(x) = e^{2x} - e^x - IR$  حالة معرفة على f

- $\lim_{x\to\infty} f(x) + (1)$ 
  - 2) تحقق ان:

lim f(x) ثم استنتج  $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$ 

#### التعلية

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x = 0$  (1)

 $\lim_{x \to 0} e^x = 0$  و  $\lim_{x \to 0} e^{2x} = 0$  زن:

 $e^{2x}(1-e^{-x}) = e^{2x}-e^{2x}.e^{-x} = f(x)$  دينا: (2

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x} (1 - e^{-x}) = +\infty$  !\ddots

 $(\lim_{x\to -\infty} e^{-x} = 0)$ : لأن:

#### 🗖 التزايد المقارن:

 $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ : بشكل عام لدينا  $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ 

ر (n∈ N\*) حيث

 $\lim_{x\to -\infty} x^n . e^x = 0$ : بشكل عام لدينا  $\lim_{x\to -\infty} x. e^x = 0$ 

حيث (n∈ N\*)

#### $\cdot e$ الدالة الأسية النيبيرية ذات الأساس $\cdot$

#### 🗖 تعریف :

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R وتحقق

$$f(0)=1$$
 ,  $f'(x)=f(x)$ 

 $x\mapsto e^x$ : تسمى الدالة الآسية ذات الأساسeونرمز لها بالرمز

 $e \approx 2,718$  : عدد حقيقي ثابت قيمته التقريبية e

#### 🗖 خواص:

من أجل كل عددين حقيقيين xو y و n عدد صحيح كيفي:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} (2 \cdot e^{x+y}) = e^x \times e^y (1$$

$$e^0 = 1 (5, (e^x)^n = e^{n.x} (4, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y})$$

$$e^1 = e$$
 (6

#### إشارة و اتجاه تغير الدالة الآسية :

R الدالة الآسية ذات الأساس e موجبة تماما على (1

f'(x) = f(x):من أجل كل x من x من أجل كل x

e ومنه الدالة الآسية ذات الأساس  $\left(e^{x}\right)=e^{x}$  : أي متزايدة تماما على R.

R من أجل كل عددين حقيقيين x و y من

x = y: يعنى  $e^x = e^y$ : اذا کان

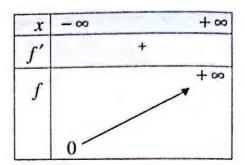
x > y: يعنى  $e^x > e^y$ : اذا كان

 $e^x > 1$ : يعنى x > 0: اذا كان

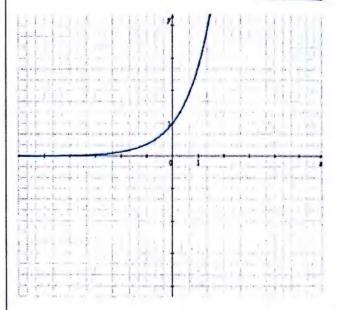
 $0 < e^x < 1$ : یعنی x < 0: اذا کان

#### السدوال الأسيات واللوغاريتميات

R المعرفة على  $f(x) = e^{x}$ : المعرفة على  $f(x) = e^{x}$  المعرفة على على عدول التغيرات:



#### الإنشاء البياني:



# $x \mapsto e^{u(x)}$ : دراسة الدالة

R إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من I فإن الدالة  $x\mapsto e^{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على المجال I ومن أجل كل عدد حقيقي من I فإن :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$$

أمثلة :

R Je 
$$f(x) = e^{x^2 - 3x + 1} \rightarrow f'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x + 1}$$
 (1)

$$R^*$$
 علی  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$  (2)

#### مثال تطبيقي:

$$R$$
 دراسة تغيرات الدالة :  $f(x) = x.e^{-x}$  على المجال  $x$ 

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 : 0$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+\right) \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$
 : ناخ

: عبارة 
$$f'(x)$$
 و إشارتها

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - e^x \cdot x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x \left(1 - x\right)}{\left(e^x\right)^2} : x \in \mathbb{R}$$
 من أجل كل

$$(e^x \succ 0$$
: لأن  $1-x$ : إشارة العبارة  $f'(x)$  من إشارة العبارة

: f تغیرات f

| x قيم | - ∞ | . 1                       | +∞ |
|-------|-----|---------------------------|----|
| f'(x) | +   | 9                         | =  |
| f     |     | $\rightarrow \frac{1}{e}$ |    |
|       | 0   |                           | 0  |

عدد a عدد (  $e^x = a$  ) عدد a عدد

حقيقي ثابت.

(مستحیلة) 
$$a \le 0 : e^x = a$$
 (1

$$x = \ln a$$
 معناه  $a > 0 : e^x = a$  (2)

#### تمرين تطبيقي

حل في R المعادلات التالية:

$$e^{x-1}-1=0$$
 (2  $2e^x+6=0$  (1

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$
 (4 •  $e^{x-1} - e^{2x} = 0$ )(3

#### السدوال الأسية واللوغاريتمية

#### التحليه

- $e^x$  ومنه  $e^x = -3$  مستحیل لأن  $e^x + 6 = 0$  (1 دوما موجب وعلیه مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة خالية .
- $e^{x-1} = e^0$  ومنه  $e^{x-1} = 1$  ومنه  $e^{x-1} 1 = 0$  (2 ومنه x = 1 أي x = 1
- وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة  $S = \{1\}$  .
  - $e^{x-1} = e^{2x}$  ومنه  $e^{x-1} e^{2x} = 0$  (3)
- -x = 1 ومنه x 2x = 1 ومنه x 1 = 2x ومنه x = -1
- $S = \{-1\}$  وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة
  - $e^{2x} 2e^x + 1 = 0$  (4
  - $(e^x)^2 2 \times 1 \times e^x + (1)^2 = 0$
  - $e^x 1 = 0$  : ومنه  $(e^x 1)^2 = 0$
  - x = 0 :  $e^x = e^0$  :  $e^x = 1$  ومنه  $e^x = 1$
- وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة  $S = \{0\}$ .

# xبها أنه من أجل كل عدد حقيقي ( $e^{x}-2$ ) بها أنه من أجل كل عدد حقيقي (2

- $e^x + 1 > 0$  فإن:  $e^x + 1 > 0$  فإن:  $e^x + 1 > 0$  فإن:  $e^x 2$  في حلول ومنه حلول المتراجحة  $e^x 2 \ge 0$  هي حلول المتراجحة  $e^x 2 \ge 0$ 
  - $x \ge \ln 2$  ومنه  $e^x \ge e^{\ln 2}$  ومنه  $e^x \ge 2$  ومنه  $S = [\ln 2; +\infty[$  : وعليه مجموعة حلول المتراجحة
- (X > 0 بوضع  $X = e^x$ : بوضع  $e^{2x} 5e^x + 6 < 0$  (3) فإن X = (X + 6) + 6 < 0
  - 11 5:21 1 0 \ 0 . 0 \
  - $\Delta = (-5)^2 4 \times 1 \times (6) = 1$
  - $X_2 = \frac{5-1}{2} = 2$  ومنه:  $X_1 = \frac{5+1}{2} = 3$
  - $x = \ln 2$  ومنه :  $e^x = 3$  أي  $x = \ln 3$  أو  $e^x = 3$  أي  $x = \ln 3$  ومنه :  $x = \ln 3$  أي  $x = \ln 3$  أي جدول إشارة العبارة  $x = \ln 3$

| xقیم                  | -∞ | 2 |   | 3      | +∞ |
|-----------------------|----|---|---|--------|----|
| $X^2 - 5.X + 6$ إشارة | +  | 0 | - | o<br>o | +  |

X > 0 : وبها أن

| x قيم                 | 0 | 2 | 3   | +∞ |
|-----------------------|---|---|-----|----|
| $X^2 - 5.X + 6$ إشارة | + | 0 | - 0 | +  |

 $e^{2x} - 5e^x + 6$  : وعليه تكون إشارة العبارة

| e <sup>x</sup> قيم        | 0 | 2 | 3   | +∞ |
|---------------------------|---|---|-----|----|
| $e^{2x} - 5e^x + 6$ إشارة | + | 0 | - 0 | +  |

ومنه:

| تیم x               | +00 | ln 2 | ln 3 | - ∞ |
|---------------------|-----|------|------|-----|
| اشارة e2x - 5ex + 6 | +   | 0    | - 6  | +   |

وعليه تكون حلول المتراجحة: ]S = ]In 2;In 3

#### المرين الطبياتي:

حل في R المتراجحات التالية:

$$e^{x-1} - e^{-2x+3} \ge 0 \quad (1)$$

$$(e^x - 2)(e^x + 1) \ge 0$$
 (2)

$$e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$$
 (3)

#### الحاله

$$e^{x-1} \ge e^{-2x+3}$$
 ومنه  $e^{x-1} - e^{-2x+3} \ge 0$  (1)

$$x+2x \ge 1+3$$
 ومنه  $x-1 \ge -2x+3$ 

$$3x \ge 4$$
  $x \ge \frac{4}{3}$ 

$$S = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ +\infty \end{bmatrix} = \frac{3}{3}$$

#### السدوال الأسياة واللوغاريتمية

### $a \in R^*$ - $\{1\}$ حيث $\{1\}$ الأسية ذات الأساس $\{1\}$

تعريف : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

R من x من أجل كل عددين حقيقيين x و x من

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} (2 \cdot a^{x+y}) = a^x \times a^y (1$$

$$(a^x)^n = a^{n.x}$$
 (4  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$  (3)

$$a^0 = 1$$
 (5

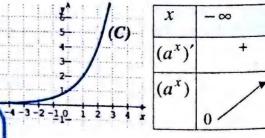
#### النهايات:

| $0 \prec a \prec 1$                  | <i>a</i> ≻1                          |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$       | $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ |
| $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ | $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$       |
| $\lim_{x \to 0} \frac{a^x}{x}$       | $\frac{-1}{-1} = \ln a$              |

$$\left(a^{x}\right)' = (\ln a) \times a^{x}$$
 : it is a substitution of the substi

R المعرفة على  $f(x) = a^x$  المعرفة على البياني للدالة:

|                      | 0 ≺ a ≺ 1 : 16           | -                    | a > 1: $a > 1$           |
|----------------------|--------------------------|----------------------|--------------------------|
| $\left(a^{x}\right)$ | $(\ln a) \times a^x < 0$ | $\left(a^{x}\right)$ | $(\ln a) \times a^x > 0$ |



## $(a = \frac{1}{2} : \text{Min}) (C)$

|   | _       |     |    |
|---|---------|-----|----|
| \ | X       | - ∞ | +∞ |
| (C)                                     | $(a^x)$ | ,   |    |
|   | $(a^x)$ | +∞  |    |
| -4-3-2-10 1 2 3 4 5 6x                  |         |     | 0  |

#### $\cdot e$ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ذات الأساس $\cdot$

#### ■ اللوغاريتم النيبيري لعدد a :

نعریف: من أجل كل عدد حقیقي a من  $]0;+\infty[$  ، يوجد عدد حقیقی وحید b بحیث  $e^b=a$ 

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نومز اليه بالرمز " lna ".

 $e^b=3$  الذي يحقق الوحيد b الذي يحقق العدد الحقيقي الوحيد b الذي العدد b

#### ■ تعريف الدالة " ln ":

نسمي" الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز إليها بالرمز"  $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي xمن  $\log + \infty$  العدد الحقيقي  $\ln x$ .

#### 🗖 خواص:

خاصية 1: إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

$$x > y$$
 يعنى أن  $\ln x > \ln y$   
 $x = y$  يسي أن  $\ln x = \ln y$   
 $x \prec y$  يعنى أن  $\ln x < \ln y$ 

#### مثال تطبيقي:

 $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$  : المعادلة: R المعادلة: 2x-3>0 و x+4>0 و x+4>0 المعادلة معرفة إذا كان: x + 4>0 و منه : x + 4>0 المياد المياد

#### السدوال الأسيسة واللوغاريتميسة

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
 : فإن :  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  ا فإن :  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 

ومنه الدالة اللوغاريثمية النيبيرية متزايدة تماما على ] ١٥: +٥٥[

$$\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
 المجال لكل عدد  $x$  من  $I$  لدينا

#### = جدول تغرات الدالة" In x ": "

| x      | 0  | +∞  |
|--------|----|-----|
| ln'(x) | +  |     |
|        |    | +00 |
| ln x   | -8 |     |

#### \* الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ذات الأساس \*

 $a \neq 1$  و  $a \succ 0$  و  $a \neq 1$ 

$$x\mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$
 المعرفة على المجال  $x\mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ 

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها بالرمز 10ga

$$\log_a: ]0; +\infty[ \to R$$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$
: و لدينا

$$\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e.

ا- لكل xو y من  $]0;+\infty[$  و لكل  $n \in N$  ، لدينا:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$x \in \left] -4; +\infty \right[ \cap \left[ \frac{3}{2}; +\infty \right] = \left[ \frac{3}{2}; +\infty \right] : 0$$

$$ln(2x-3) = ln(x+4)$$
 : ولدينا

$$2x-3=x+4$$

$$S = \{7\}$$
: ومنه  $x = 7 \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ 

$$\ln(x-1) > \ln(x)$$
 عل في R المتراجحة (2

$$x \succ 0$$
 و  $x \succ 1$  تكون المتراجحة معرفة إذا كان: 1  $\rightarrow x$ 

$$x-1 \succ x$$
 لدينا  $\ln(x-1) \succ \ln(x)$  يعني أن  $1 \rightarrow 2$  يعني أن  $1 \rightarrow 2$  يعني أن  $1 \rightarrow 2$ 

$$\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$$
 و لدينا تقاطع المجالين  $]\infty+;1$  و لدينا

ا خان 
$$x$$
 و  $y$  عددان حقیقیان مو جبان تماما .

$$\ln (x \times y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln (x') = r \ln x \qquad r \in Q$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad :$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \int_{x \to 0^{+}}^{1} x^{n} \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

#### السدوال الأسياة واللوغاريتمية

2-لكل r∈Q ولكل |∞+;0[ ع. لدينا: | ب-حال

$$\log_a(x') = r \log_a(x)$$

: log الدالة 3-3

$$D_{\log} = ]0; +\infty[$$
 مين الدالة والدالة الدالة الدال

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to a}\log_a(x) = -\infty :$$
نان :  $a > 1$  نان :  $a > 1$ 

$$\lim_{x \to \infty} \log_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty : فإن : 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a(x) = -\infty$$

$$\forall x \in ]0;+\infty[$$
 : لدينا : المغيرات : لدينا : الدينا : المغيرات : الدينا : المغيرات : ال

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

الجال الجال الدينا  $\log_a$  متزايدة تماما على المجال الحال

| _ x         | 0 + |
|-------------|-----|
| $\log_a(x)$ | +   |
| $\log_a(x)$ | +0  |
| Sa (V)      |     |

ب- حالة 0<a<1 : لدينا الم المجال ]0;+∞ متناقصة تماما على المجال ]0;+∞

| х             | 0+∞ |
|---------------|-----|
| $\log_{a}(x)$ | -   |
|               | +∞  |
|               |     |
| $\log_a(x)$   |     |

#### 🗖 دالة اللوغاريتم العشري:

1/ تعریف:

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و نرمز لها بالرمز log (عوض log10) ، و

$$\log: ]0; +\infty[ \to R$$

$$x \mapsto \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$
 : لدينا

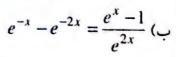
2/ ملاحظة:

$$\log 1 = 0 \cdot \log 10 = 1 - 1$$

$$\forall r \in Q$$
 ,  $\log(10^r) = r \log 10 - \varphi$ 

$$\forall (x; y) \in (]0; +\infty[]^2, x = y$$
 يعني  $\log x = \log y - 1$ 

# تمارين



$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
(>35)

#### التمرين 01:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x. مايلي:

$$(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}$$
 (1)

#### السدول الأسيدة واللوغاديتمية

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-2 ; 1+b=-2 ; b=-3 \\ \frac{e^{x}-2}{e^{x}+1} = 1 - \frac{3}{e^{x}+1} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{2x}-3e^{x}+5}{e^{x}+2} = e^{x} + a + \frac{b}{e^{x}+2}$$

$$e^{x} + a + \frac{b}{e^{x}+2} = \frac{e^{x}(e^{x}+2) + a(e^{x}+2) + b}{e^{x}+2}$$

$$= \frac{e^{2x}+2e^{x}+ae^{x}+2a+b}{e^{x}+2}$$

$$= \frac{e^{2x}+(2+a)e^{x}+2a+b}{e^{x}+2}$$

$$= \frac{e^{2x}-3e^{x}+5}{e^{x}+2}$$

$$\begin{cases} (2+a) = -3; a = -5 \\ 2a+b = 5 \end{cases}$$

$$b = 15 : b = 10+b = 5$$

$$e^{2x} - 3e^{x} + 5 = e^{x} - 5 + \frac{15}{e^{x} + 2}$$

$$e^{2x} + 2 = e^{x} - 5 + \frac{15}{e^{x} + 2}$$

#### السرين 02

تعتبر كثير الحدود (x) للمتغير الحقيقي x حيث:  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ : المحسب (x) ثم تحقق من أن :  $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$   $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ اعداد حقيقية يطلب تعيينها. P(x) = 0 P(x) = 0

: استتج الحلول في R للمعادلة R استتج الحلول في R R R المعادلة  $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^{x} + 2 = 0$ 

$$\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1}=u-\frac{\dot{a}}{e^{x}+1}$$

$$\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1}=u-\frac{\dot{a}}{e^{x}+1}$$

$$\frac{e^{2x}-3e^{x}+5}{e^{x}+2}=e^{x}+u-\frac{\dot{a}}{e^{x}-2}$$

#### حل لتعربين 01:

 $a + \frac{b}{a^2 + 1} = \frac{ae^2 + a + b}{e^2 + 1} = \frac{e^2 - 2}{e^2 + 1}$ 

### حل التبرين 02

### حل لتعرين 03:

 $e^{s-1} = e^0$  ...  $e^{s-1} = 1$  ...  $e^{s-1} - 1 = 0$  / (1 رت x−1=0 أي x=1 وعليه مجموعة حلول للعادلة هي المجموعة  $S = \{1\} = S$ . x-1=2x  $e^{x-1}=e^{2x}$   $e^{x-1}-e^{2x}=0$ x = -1 |x| - x = 1 |x - 2x| = 1وعليه مجموعة حلول العابلة هي المجموعة {I-} = S .  $e^{2x} + e^{1-2x} - (e+1) = 0$  $e^{2x} + e \times e^{-2x} - (e+1) = 0$  $e^{2x} + e \times \frac{1}{e^{2x}} - (e+1) = 0$  $e^{2x} \neq 0$  ille  $\frac{e^{4x} + e - ee^{2x} - e^{2x}}{e^{2x}} = 0$ 

المالات المالات المالات 
$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$$
 $e^{x-1} - 1 = 0 / 1$ 
 $P(2) : -1 - e^{4x} = 0 / 2$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (2 - 2)(2) + (2 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (2 - 2)(2) + (2 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (2 - 2)(2) + (2 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (2 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P(3) = (3 - 2)(2) + (3 - 2)(2)$ 
 $P$ 

• 
$$2x^2 - x - 1 = 0$$
 و •  $x - 2 = 0$  :  $x - 2 = 0$  :  $x - 2 = 0$  :  $x = -\frac{1}{2}x = 2$  :  $x = 1$  و  $x = -\frac{1}{2}x = 2$  :  $x = 2$  :  $x = 1$  و  $x = -\frac{1}{2}x = 2$  :  $x = 3$  :  $x = 2$  :  $x = 3$  :  $x = 2$  :  $x = 3$  :

• 
$$e^{z} = -\frac{1}{2}(\text{jerm})$$
  
•  $s = \{0; \ln 2\}$ 

 $x \ge \frac{4}{3}$  اي  $x \ge 4$  ومنه  $x \ge 4$  اي  $x \ge 5$  اي  $x \ge 4$  اي  $x \ge 5$  اي  $x \ge 6$  اي

 $S = ]-\infty;+\infty[$  : وعليه مجموعة حلول المتراجعة  $(e^x - 2)(e^x + 1) \ge 0$  ج/

بها أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن  $e^x + 1 > 0$  فإن  $e^x + 1 > 0$  عدد حقيقي  $e^x - 2$   $e^x + 1 \ge 0$  هي حلول المتراجحة  $e^x \ge e^{\ln 2}$  ومنه  $e^x \ge e^{\ln 2}$  ومنه  $e^x \ge \ln 2$ 

 $S = [\ln 2; +\infty[: az-b]]$  وعليه مجموعة حلول المتراجعة  $X = e^x$ : د/  $e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$  (بوضع  $X = e^x$ : فإن  $X^2 - 5.X + 6 < 0$  فإن  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (6) = 1$ 

$$X_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$
  $X_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ 

 $x = \ln 2$  ومنه  $e^x = 2$  أي  $x = \ln 3$  أي  $e^x = 3$ : ومنه  $x = \ln 3$  أي  $x = \ln 3$  أي  $x = \ln 3$  أي  $x = \ln 3$  أي المبارة العبارة العبارة  $x = \ln 3$  أي المبارة العبارة ال

| قیم x           | -∞ | 2 | 3   | +∞ |
|-----------------|----|---|-----|----|
| إشارة           | +  | 0 | - 0 | +  |
| $X^2 - 5.X + 6$ |    |   | -   |    |

وبها أن : 0 < X

| قيم x                 | 0 | 2 | 3   | +∞ |
|-----------------------|---|---|-----|----|
| $X^2 - 5.X + 6$ إشارة | + | 0 | - 0 | +  |

 $e^{2x} - 5e^x + 6$ : وعليه تكون إشارة العبارة

| e' مي <b>ن</b>     | 0 | 2   | 3 | , | +∞ |   |
|--------------------|---|-----|---|---|----|---|
| اشارة 6 +6 e21-5e1 | + | J - | 7 | + |    | / |

 $e^{4x} - (e+1)e^{2x} + e = 0$  :فإن  $(X > 0 - X = e^{2x})$  (بوضع:  $X^{2} - (e+1).X + e = 0$ : فإن  $\Delta = (e+1)^2 - 4 \times 1 \times e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2$  $X_1 = \frac{e+1+\sqrt{(e-1)^2}}{2} = \frac{e+1+e-1}{2} = e$  $X_2 = \frac{e+1-\sqrt{(e-1)^2}}{2} = \frac{e+1-e+1}{2} = 1$  $X=1 \rightarrow e^{2x}=1 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0$ :  $X = e \rightarrow e^{2x} = e \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$  $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$  وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$  (2)  $(e^x - 1)^2 = 0$ : ومنه  $(e^x)^2 - 2 \times 1 \times e^x + (1)^2 = 0$  $e^x = 1$  ومنه  $e^x - 1 = 0$  وعليه فإن: ومنه:  $e^x = e^0$  وعليه: x = 0 وعليه مجموعة حلول  $S = \{0\}$  المعادلة هي المجموعة

 $e^{2|x|}+e^{|x|}-2=0$  (هـ  $X^2+X-2=0$  : فإن X>0 فإن  $X=e^{|x|}$  (بوضع  $X=e^{|x|}$  عيث  $X=e^{|x|}$ 

$$X_{1} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$X_{2} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad (\text{wision}) \quad \text{o}$$

$$e^{|x|} = e^{0} \text{ also } e^{|x|} = 1 \text{ col } X = 1 \text{ and } x = 0$$

$$x = 0 \text{ col } |x| = 0 \text{ and } x = 0$$

$$e^{x-1} \ge e^{-2x+3} \text{ and } e^{x-1} - e^{-2x+3} \ge 0 \quad \text{for } (2 + 2x \ge 1 + 3)$$

$$e^{x+2x} \ge 1 + 3 \text{ col } x = 0$$

### السدوال الأسيارة واللوغاريتمان

ومنه

| بنم ۲. | -10 | ln 2 | ln3 | +00 |
|--------|-----|------|-----|-----|
| إشارة  | +   | d -  | 0   | +   |
|        |     | Y    | Ĭ   |     |

 $S = \ln 2 \cdot \ln 3$  [ sale like | S =  $\ln 2 \cdot \ln 3$  ]

$$(X>0)$$
 حیث  $X=e^{x}$ : برضع  $e^{2x}+e^{x}-6<0/a$ 

$$X^2 + .X - 6 < 0$$
 : نان

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$$

$$X_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$
 (  $X_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ 

$$x = \ln 2$$
 رمنه :  $e^x = 2$ 

$$: X^2 + . X - 6$$
 جدول إشارة العبارة

$$x$$
 اینارة  $-\infty$   $-3$   $+\infty$   $X^2 + . X - 6$  اینارة  $+$   $+$   $+$   $+$ 

X > 0: 0 | 0 |

| قيم ٢         | 0 | 2 | +∞ |
|---------------|---|---|----|
| إشارة X2+.X-6 | - | 0 | +  |

 $e^{2x} + e^x - 6$ : وعليه تكون إشارة العبارة

| e ' نيم                  | 0   | 2 | +∞ |
|--------------------------|-----|---|----|
| $e^{2x} + e^x - 6$ إشارة | *** | 0 | +  |

ومنه:

| قيم ٢.                 | - ∞ | ln 2 | + ∞ |
|------------------------|-----|------|-----|
| اشارة e2، +e1 -6 إشارة | -   | 6    | +   |

وعليه تكون حلول المتراجحة: ]S = }- ∞: In 2 ضحا

$$e^{x} = 1$$
:  $0$ :  $e^{x} - 1 = 0$ :  $0$ :  $\frac{e^{x} - 1}{2 - e^{x}} > 0$ 

$$x = \ln 2$$
 پان:  $2 - e^x = 0$  بان:  $2 - e^x = 0$ 

### 0 ∞- نبم ۲ In 2 e م ا النارة 1 - 0 $2-e^{x}$ إشارة $\left|\frac{e^x-1}{2-e^x}\right|$

وعليه تكون حلول المتراجحة: ] 2 اا: ٥ [ = 3

### التعرين 04:

(x المعادلات التالية: (المجهول x)

$$\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$$
 (1)

$$\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$$

$$\ln(x^2 + x) = 1 \ (\Rightarrow$$

$$\ln|1-x| = \ln 3 \ ($$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1 \ (\triangle$$

$$\ln(x^2-2x) = \ln(x+10)$$
 (.

التالية: x المتراجحات ذات المجهول x التالية:

$$\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$$
 (1)

$$ln(2x+3) < 5$$

$$\ln x > \ln(2x-1) ($$

$$x.\ln x - \ln x \ge 0$$

### حل التمرين 04:

$$\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$$
 (1(1)

المادلة معرفة إذا و فقط إذاكان:

$$x>0$$
:  $0>x>0$ 

$$\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$$
:  $0;+\infty[نمن اجل کل x من اجل کل من$ 

$$3+x=3x$$
 رمت  $\ln(3+x)=\ln 3x$ 

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{a.s.} \quad \boxed{39}$$

هـ) 
$$1 - 1 = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
 تكون المادلة معرفة إذا كان: 
$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1 :$$
ولدينا

$$e.x + e = x - 1$$
:  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{e}$ :  $\frac{x+1}{x-1} = e^{-1}$ 

$$e.x - x = -e - 1$$
:

$$x = \frac{e+1}{1-e}$$
: ig  $x = \frac{-e-1}{e-1}$ 

$$S = \left\{ \frac{e+1}{1-e} \right\} : \text{ on } x = \frac{e+1}{1-e} \in ]-\infty; -1[\bigcup] 1; +\infty[ \ ]$$

$$\ln(x^2 - 2x) = \ln(x + 10)$$
 (9)

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$x^2 - 2x > 0$$
 ,  $x + 10 > 0$  :  $x + 10 > 0$ 

$$x(x-2) > 0$$
 و  $x \ge -10$ 

$$x \in ]-\infty;0[\bigcup]2;+\infty[$$
 تکافئ  $x \ge -10$  تکافئ

$$x \in ]-10;0[\cup]2;+\infty[:]$$

$$[-10;0]U]_{2;+\infty}$$
 and  $[-10;0]U]_{2;+\infty}$ 

$$\ln(x^2 - 2x) = \ln(x + 10)$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
 تکافئ  $x^2 - 2x = x + 10$  تکافئ

$$x = -2$$
 او  $x = 5$ 

$$\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10) (ب )$$
المعادلة معرفة إذا وفقط إذاكان:

$$x > 2$$
:  $0 < x + 10 > 0$   $x > 0$   $x > 0$ 

$$: ]2;+\infty[$$
 من أجل كل  $x$  من أجل ك

$$\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$$

$$\ln(x(x-2)) = \ln(x+10)$$

$$x(x-2) = x+10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x=-2$$
 أو  $x=5$ 

$$(-2 \notin ]2;+\infty[$$
 (لأن:  $x=5$ 

$$\ln(x^2 + x) = 1 \ (\Rightarrow$$

$$x^2 + x \succ 0$$
: تكون المعادلة معرفة إذا كان

$$x \in ]-\infty;-1[\bigcup]0;+\infty[$$
 ومنه :

$$x^2 + x = e$$
 ولدينا :  $\ln(x^2 + x) = 1$  أي

$$x^2 + x - e = 0$$
:

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-e) = 1 + 4e$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \in ]-\infty; -1[\bigcup ]0; +\infty[:]$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2} \in -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1 + 4e}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2} \right\} : equal 5$$

$$\ln|1-x| = \ln 3$$

$$x \neq 1$$
 ومنه:  $1-x \neq 0$  ومنه:  $1 \neq x \neq 1$ 

$$x \in R - \{1\}$$
 : إ

$$|1-x|=3$$
 ولدينا:  $\ln |1-x|=\ln 3$  اي

$$1-x=-3$$
  $1-x=3$ :

$$S = \{-2,4\}$$
:

| x بن               | 0 |   | +∞ |
|--------------------|---|---|----|
| إشارة <b>١</b> - x | - | þ | +  |
| إشارة In x         |   | 0 | +  |
| إشارة x-1)ln.x)    | + | 0 | +  |

 $S = ]0;+\infty[$  :  $x \in ]0;+\infty[$  :  $\infty[$ 

### التعريز 05

 $4(\ln x)^2 - 1 = 0$  / أب المعادلات التالية : أر 1 = 0 / ب 1 = 0 / ب 1 = 0 / ب 1 = 0 / ب 1 = 0 / ب غتبر كثير الحدود 1 = 0 / ب غيبر الحدود 1 = 0 / ب غيبر كثير الحدود 1 = 0 / ب غيبر كثير الحدود 1 = 0 / ثم بين أن 1 = 0 أم بين أن 1 = 0 أم بين أن 1 = 0 أعداد حقيقية يطلب تعيينها 1 = 0 أعداد حقيقية يطلب تعيينها 1 = 0 أعداد حقيقية يطلب تعيينها 1 = 0 أعداد أب 1 = 0 المعادلة 1 = 0 أستنتج حلول المعادلة 1 = 0 1 = 0

### حل التمرين 05:

 $(1 - 1)^2 = 0$  المعادلة معرفة إذا كان  $(1 - 1)^2 - 1 = 0$  المعادلة معرفة إذا كان  $(1 - 4X^2 - 1) = 0$  المعادلة معرفة إذا كان  $(1 - 1)^2 - 1 = 0$  المعادلة معرفة إذا كان  $(1 - 1)^2 - 1 = 0$  المعادل  $(1 - 1)^2 - 1 = 0$  المعادل

### السدوال الأسيت واللوغاريتميت

### التمرين 06:

اختر الجواب الصحيح مع التبرير.

اختر الجواب الصحيح مع التبرير .
$$\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) < 0 \text{ خوم المراجحة } 0 < 1$$

$$\int - \sqrt{x-1} = 1 \text{ distance in the possibility of the possibil$$

معلم في معلم  $f(x) = x.e^x$  : ميان الدالة f حيث fمتعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ماسا عند النقطة معامل توجیهه یساوی:

. 1 / 2 ، ب / 2 - ، ج / 1 - ، د / 1 .  $\sim -\infty$  أ الله  $\lim_{x\to \infty} [2x-x.\ln(x-1)]$  /4

42 با ∞+ ، جا 0 ،د/ 1 .

f(x) - xf'(x) = -x + 1 / = -x + 1

 $f'(x) = 2f(x) - x \ln x / x$ 

$$4(\ln|x|)^2 - 1 = 0$$
 ب/  
 $x \neq 0$ : المعادلة معرفة إذا كان

 $X^2 = \frac{1}{4}$ : نضع  $X = \ln |x|$  ومنه  $X = \ln |x|$  اي  $X = \ln |x|$ 

$$X = \frac{-1}{2} \quad \text{if} \quad X = \frac{1}{2}$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{2}$$
  $\ln|x| = \frac{1}{2}$ 

$$|x| = e^{\frac{-1}{2}}$$
 of  $|x| = e^{\frac{1}{2}}$ :

 $(x=e^{-\frac{1}{2}} | x=-e^{-\frac{1}{2}})$  i  $(x=e^{\frac{1}{2}} | x=-e^{\frac{1}{2}})$ 

$$S = \left\{ e^{\frac{-1}{2}}; e^{\frac{1}{2}}; -e^{\frac{1}{2}}; -e^{\frac{-1}{2}} \right\} : e^{-\frac{1}{2}}$$

$$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x - 2$$
 (2)

$$A(2) = 4(2)^3 - 8(2)^2 - 2 - 2 = 0$$
 (1)

 $A(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ : حيث c;b;a

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$$

$$=a^{3}+(b-2a)x^{2}+(c-2b)x-2c$$

$$a = 4$$
 $b - 2a = -8; b - 8 = -8; b = 0$ 
 $c - 2b = -1; c = -1$ 
 $-2c = 2; c = -1$ 

$$A(x) = (x-2)(4x^2-1)$$
:

$$:R$$
 في  $A(x) = 0$ 

$$(x-2)(4x^2-1)=0$$
:  $A(x)=0$ 

$$x=2$$
: ومنه  $x-2=0$ : إما

$$x = \frac{-1}{2}$$
 او  $x = \frac{1}{2}$ : ای  $x^2 = \frac{1}{4}$ : او  $(4x^2 - 1) = 0$  او  $S = \left\{2; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right\}$  ومنه

$$4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$$

### حل التمرين 06:

: تكون المتراجعة معرفة إذا كان 
$$\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) < 0$$
 ا تكون المتراجعة معرفة إذا كان  $\frac{x+2}{x-1} > 0$ 

| قيم ٪        | - ∞ | -2 |   | 1 | + ∞ |
|--------------|-----|----|---|---|-----|
| إشارة x+2    | -   | 9  | + |   | +   |
| x-1 إشارة    | -   |    | • | Ç | +   |
| إشارة النسبة | +   | 9  | - | 9 | +   |

$$x \in ]-\infty;-2[\cup]!;+\infty[$$
 ومنه :  $\frac{x+2}{x-1} < 1 : \emptyset$  المينا :  $0 : \lim \left(\frac{x+2}{x-1}\right) < 0 : \emptyset$  المينا :  $0 : \frac{3}{x-1} < 0 : 0$  المينا :  $0 : \frac{x+2}{x-1} = 1 < 0 : \emptyset$  ومنه :  $0 : 0 : 0$ 

ومنه

$$S = (]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[)\cap (]-\infty;1[) = ]-\infty; -2[$$

a substituting the substitution of the

قابلة للاشتقاق على المجال 
$$f(x) = 2x + 1 + x \cdot \ln x$$
(2 : ]0;+∞[

$$f'(x) = 2 + 1.\ln x + \frac{1}{x}.x = 3 + \ln x :$$

$$f'(x) \neq x.f(x) + 2$$

$$f'(x) + f(x) \neq 2x + 5 + x \ln x$$

$$f'(x) \neq 2f(x) - x \ln x$$

$$f(x) - xf'(x) = 2x + 1 + x. \ln x - 3x - x \ln x$$

$$(x) - xy (x) = 2x + 1 + x \cdot \ln x - 3x - x \cdot \ln x = -x + 1$$

معناه الإجابة الصحيحة هي: (ج).

$$f(x) = x.e^{x}$$
 (3)

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$$
:

ولدينا :  $I = (1+0)^{(1)} = e^{(1)}(0+1) = 1$  (معامل توجيه الماس عند النقطة (1) معناه الإجابة الصحيحة هي : (د) .

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ 2x - x \cdot \ln(x - 1) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \cdot (2 - \ln(x - 1))$$
(4)

---

( لأن:  $0 \rightarrow +\infty$ , و  $0 \rightarrow +\infty$  ) معناه الإجابة الصحيحة هي: (أ).

### التمرين 07:

و دالة معرفة على IR بسر IR بسر IR و IR و IR دالة معرفة على IR دالة معرفة على منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس IR ( $O:\overline{I};\overline{J}$ ) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس I أدرس تغيرات الدالة I.

2/ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتها.

(C) مركز تناظر للمنحى  $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$  مركز تناظر للمنحى /3

A أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A

■ لتكن g الدالة المعرفة على IR كمايلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

 $g'(x) = \frac{(e'-1)^2}{4(1+e')^2}$ : IR من IR جين أن من أجل كل IR

6/ شكل جدول تغيرات الدالة بي .

IR على g(x) على الم

Tاستنتج الوضعية النسبية للمهاس T)بالنسبة إلى المنحني T

8/ أرسم المنحني (C).

### حل التمرين 07:

IR معرفة على f: f معرفة على IR

$$(\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \text{ if } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{1 + e^{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{1 + e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{e^{x} (e^{-x} + 1)} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$(\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0)$$
 (الأن

قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^x.e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

f'(x)0: IR من أجل كل x من أجل

f نه جدول تغیرات الداله

| x قيم | -∞ | +∞ |
|-------|----|----|
| f'    | +  |    |
| f     | 0  | 1  |

### 2) المستقيمات المقاربة:

 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$  الدينا:

(C) مقارب للمنحنى y=0 المنحنى (C) في جوار  $\infty$ 

ا إذن: المستقيم ذو المعادلة y=1 مقارب  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$ 

للمنحني (C) في جوار ∞+

 $(-x) \in IR$  فإن: IR فإن (3) من أجل كل x من أجل كل

 $[2(0)-x] \in IR$ 

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$2(1/2) - f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

نتيجة: من أجل كل x من IR:

$$f(2(0)-x)=2(1/2)-f(x)$$

$$(C)$$
مركز تناظر للمنحنى  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  مركز مناظر المنحنى

عند النقطة  $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$  تكتب من الشكل: (4

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

(T) منه: معادلة الماس 
$$f(0) = 1/2$$
  $f'(0) = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$ 

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$
:

g (5 قابلة للإشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$
$$= \frac{1+2e^x + e^{2x} - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$
$$= \frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2} = \frac{1-2e^x - e^{2x}}{4(1+e^x)^2}$$

وما  $(e^x - 1)^2$  من إشارة  $(e^x - 1)^2$  لأن المقام دوما g'(x) موجب ولدينا:

| x قیم       | -∞ | 0 | +∞ |
|-------------|----|---|----|
| f'(x) إشارة | +  | þ | +  |

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = -\infty$$
(lim  $f(x) = 0$  ناک )

### السدوال الأسياة واللوغاريتمية

التمرين 08:

 $(\lim_{x \to -\infty} xe^x)$  الهدف من هذه المسألة هو حساب: ( $\lim_{x \to -\infty} xe^x$ )

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$
: حيث  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$  دالة معرفة على  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ 

. 
$$f''(x)$$
 و  $f'(x)$  و (1

- عين إشارة  $e^x 1 \ge 0$  : المتراجعة R عين إشارة (2
- على المجال  $]\infty+\infty[$  و استنتج اتجاه تغير الدالة f''(x)
  - f'(x)
  - 3) شكل جدول تغيرات الدالة f' (النهايات لا يطلب حسابها ) ثم استنتج إشارة f' .
    - . عين اتجاه تغير الدالة f و استنتج إشارتهاf
- : فإن  $0;+\infty$  أثبت أنه من أجل كل x من المجال  $0;+\infty$  فإن (5

$$\cdot \frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$$

 $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$  استعمال نظریات النهایات بالحصر استنتج – 6

 $\lim_{x\to -\infty} xe^x$ 

- 7) بالاعتباد على ما سبق أحسب:
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} (2 \cdot \lim_{x \to +\infty} (e^x x) (1$
- $\lim_{x \to -\infty} (2x 1)e^{x} (4 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} e^{x}}{x} (3)$
- $(\lim_{x\to 0} x \ln x)$  استنتج نما سبق حساب لـ السنتج نما سبق حساب لـ (8
  - $\lim_{x \to +\infty} (3 x 2 \ln x) (1)$  (9)
  - $\lim_{x \to +\infty} (3 x 2\ln(x+1)) (2$ 
    - $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 \ln(x 2)}{x + 1}$  (3)

$$\lim_{x \to 0} \left(2 - x \ln x^3\right) (4$$

# $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} - f(x)$ $= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} + 1 = +\infty$

$$(\lim_{x \to 0} f(x) = 1)$$

منه: جدول تغيرات الدالة g:

$$g(0) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{2} - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

| x قيم | -∞ |   | 0     |   | +∞ |
|-------|----|---|-------|---|----|
| g'    |    | + | ģ     | + |    |
| g     |    |   | 1     |   | +∞ |
|       |    |   | × 0 - |   |    |
|       | -∞ |   |       |   |    |

 $g\left( x
ight)$  من جدول تغيرات الدالة  $g\left( x
ight)$  نستنتج إشارة

| x قيم      | -∞ | 0 | +∞ |
|------------|----|---|----|
| g(x) إشارة | _  | Ó | +  |

الوضعية النسبية لـ (C)و (T): لدينا:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = g(x)$$

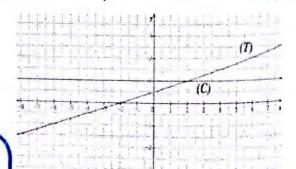
. 
$$g(x)$$
 هي إشارة  $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$  هي إشارة

$$(C)$$
 ومنه: لما  $[-\infty;0]$  المهاس  $(T)$  يقع تحت المنحنى

$$(C)$$
 يقطع المنحنى  $(x=0)$  للماس  $(x=0)$ 

$$(C)$$
 الماس  $(T)$ يقع فوق المنحنى  $x \in (T)$ .

8-الإنشاء



$$\frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2} : x \in ]0; +\infty[$$
 وبها أنه من أجل  $f'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x : x \in [0; +\infty[$  من أجل  $f''(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x : x \in [0; +\infty[$  افإن  $f''(x) = e^x - 1$ 

$$e^{x} \ge 1$$
 أي  $e^{x} - 1 \ge 0$  أي  $(2 + 2) = 1$  أي  $(2 + 3) = 1$  ومنه  $(2 + 3) = 1$  ومنه  $(3 + 3) = 1$  ومنه  $(3 + 3) = 1$  ومنه  $(3 + 3) = 1$  إشارة  $(3 + 3) = 1$ 

$$f''(x) \ge 0$$
 :  $e^x - 1 \ge 0$  فإن  $x \in [0; +\infty[$  من أجل  $f' : x \in [0; +\infty[$  متزايدة تماما على المجال  $f' : (f'(0) = 1) : f'$  المدالة  $f' : f'(0) = 1$ 

| X قيم        | 0 | +∞       |
|--------------|---|----------|
| f''(x) إشارة | + |          |
| f'(x)        |   | <b>—</b> |
|              | 1 |          |

### : f'(x) إشارة

 $x \in [0;+\infty[$  نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل ومنه f'(x) موجبة تماما.

نإن  $x \in [0;+\infty]$  موجبة تماما من أجل f'(x) فإن (4 .  $[0;+\infty[$  الدالة f متزايدة تماما على المجال

### إشارة الدالة f

$$f(0) = 1$$
 و  $[0; +\infty[$  المجال  $[0; +\infty[$  و  $[0; +\infty[$  فإن : من أجل  $[0; +\infty[$  ومنه :  $[0; +\infty[$  أي :  $[0; +\infty[$  ومنه :  $[0; +\infty[$  ومنه :  $[0; +\infty[$  أي :  $[0; +\infty[$  ومنه :  $[0; +\infty[$  أي :  $[0; +\infty[$  ومنه :  $[0; +\infty[$  أي :  $[0; +\infty[]]]$  أي :  $[0; +\infty[]]$  أي :  $[0; +\infty[]]]$  أي :  $[0; +\infty[]]]$ 

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty : لدينا (6)$$

$$\frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$$
 :  $x \in ]0;+\infty[$  وبيا أنه من أجل

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
: فإن  $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \ge \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2}$ : فإن

$$x = -X$$
: نضع :  $X = -x$  أي :  $X = -X$ 

$$X \to +\infty$$
 : فإن  $x \to -\infty$  : لا

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = \lim_{X \to +\infty} (-X) \cdot e^{-X}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{-1}{e^X} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0 : e^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( e^x - x \right) = +\infty - \infty \text{ (F.I) } /1 \text{ (7)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left( e^x - x \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$$

$$(x \to +\infty)$$
  $\frac{e^x}{x} \to +\infty$  : نلأن

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (F.I) } /2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$
 ولدينا: 0

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty} \text{ (F.I) /3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x (1 - e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} (1 - e^x) = -\infty$$

$$(1-e^x \to -\infty$$
  $\frac{e^x}{x} \to +\infty$  : نان

$$\lim_{x \to -\infty} (2x - 1) e^x = -\infty \times 0 \text{ (F.I) } /4$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x-1) \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \left[ 2xe^x - e^x \right] = 0$$

$$(e^x \to 0) \cdot xe^x \to 0 : \forall 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2\ln(x+1))$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1) \left( \frac{3}{x+1} - \frac{x}{x+1} - 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)$$

=-00

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$
 \(\frac{1}{2}\):

$$(\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0:$$
 لأنها من الشكل

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \ln(x - 2)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x + 1} - \frac{\ln(x - 2)}{x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x + 1} - \frac{x - 2}{x + 1} \times \frac{\ln(x - 2)}{x - 2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left( 2 - x \ln x^3 \right) = \lim_{x \to 0} \left( 2 - 3x \ln x \right) = 2 (4)$$

### التمرين 09:

### الهدف من هذه المسألة هو حساب:

$$(\lim_{x\to-\infty}x^ne^x\,\, \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n})$$

$$(\lim_{x\to 0} x^n \ln x) \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n})$$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن :

$$e^{x-n\ln x} = \frac{e^x}{r^n}$$

. 
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$$
: ثم استتج :  $\lim_{x \to +\infty} (x - n \ln x)$ : احسب (2

$$x^n e^x = \frac{(-X)^n}{e^X}$$
 : بوضع  $X = -x$  بین آن  $X = -x$ 

. 
$$\lim_{x\to\infty} x^n e^x$$
 ثم استنتج

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (F.1)} \text{ o}$$

$$x = e^{X} : \omega_{0} = X = \ln x : \omega_{0}$$

$$X \to +\infty : \psi_{0} = x \to +\infty : \mathbb{I}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{X}{e^{X}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \times (-\infty) \text{ (F.1)} \text{ o}$$

$$x = \frac{1}{X} : \omega_{0} = X = \frac{1}{X} : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{1}{X} \left( \ln \frac{1}{X} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{X} \left( \ln \frac{1}{X} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( 3 - x - 2 \ln x \right) (1 : \omega_{0})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x) (1 : \omega_{0})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x) (3 : \omega_{0})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2 \ln x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{nX}{e^{nX}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{u}{e^u} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 : \omega$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.J}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x = \frac{1}{X} : \omega = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.J}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x = \lim_{x \to 0} x = \frac{1}{X} : \omega = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{X} \left( \ln \frac{1}{X} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[ -\frac{1}{X^n} (\ln X) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[ -\frac{\ln X}{X^n} = 0 \right]$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 : \omega$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^{3} - 2e^{x}) = \lim_{x \to +\infty} x^{3} \left[ 1 - 2 \cdot \frac{e^{x}}{x^{3}} \right] = -\infty / (6)$$

$$(x^{3} \longrightarrow +\infty) \frac{e^{x}}{x^{3}} \longrightarrow +\infty : \dot{\psi}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^{3} - 2x + 1) e^{x} = \lim_{x \to -\infty} (x^{3} e^{x} - 2x e^{x} + e^{x}) = -\infty / \psi$$

$$(xe^{x} \longrightarrow 0) : \dot{x}^{3} e^{x} \longrightarrow 0 : \dot{\psi}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 3\ln(x+1)) \qquad |x| = \lim_{x \to +\infty} (x+1) \left[ \frac{2x}{x+1} - 3\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$(\frac{2x}{x+1} \rightarrow 2) \cdot \frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0) : \dot{V}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} : -x = 10x : -4$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x : -x = \frac{1}{x} : -2x = 5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x : -x = \frac{1}{x} : -2x = 5$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 1)e^{x} : -x = 10x : -2x = 10$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 1)e^{x} : -x = 10x : -2x = 10x = 10$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 1)e^{x} : -x = 10x : -2x = 10x = 10x = 10$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 1)e^{x} : -x = 10x : -2x = 10x =$$

$$e^{x-n\ln x} = e^{x-\ln x^{x}} = e^{x} e^{-\ln x^{x}} = \frac{e^{x}}{e^{\ln x^{x}}} = \frac{e^{x}}{x^{x}} (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x-n\ln x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1-n\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty (2)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x-n\ln x} = +\infty : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x-n\ln x} = +\infty : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} (1-x)^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n} e^{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^{x}}{e^{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \frac{+\infty}{e^{x}} (F.1) (4)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^{x}}{(e^{x})^{n}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^{x}}{(e^{x})^{n}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{xx}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{xx}}$$

 $n.X \rightarrow +\infty$  : قان :  $X \rightarrow +\infty$  : u = n.X برضع :  $X \rightarrow +\infty$ 



لنكن الدالة بر المعرفة على الم كيايل:

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

- 1) احسب النهايات على ٥٠ و ٥٠ + للدالة g .
- احسب (x) الإ واستنتج اتجاه تغیر بر وشکل جدول تغیرانها.
- 3) بين أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيد α حيث :
   3) بين أن المعادلة 20.94
  - 4) عين إشارة K على R.
  - : لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي O التكن الدالة  $f(x) = (2x 5)(1 e^{-x})$ 
    - 1) أدرس إشارة الدالة أر على R.
  - . f احسب النهايات على  $\infty$  و  $\infty$  + للدالة f
    - x فإن نه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :
- R على  $f'(x) = g(x)e^{-x}$  على  $f'(x) = g(x)e^{-x}$ 
  - شكل جدول تغيرات 4.
- ر مقارب y=2x-5 بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $(C_f)$  بين أن المستقيم  $(C_f)$  بجوار  $(C_f)$ 
  - $(\Delta)$  ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$
  - $(C_f)$  بفرض آ-  $\times$   $(\alpha)$   $\times$   $(\Delta)$  و  $(C_f)$  بفرض آ-  $\times$   $(\Delta)$

### حل التمرين 10:

لتكن الدالة ع المعرفة على R كما يلي :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty , \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$
- $g'(x) = 2e^x + 2 : R$  من اجل کل x من اجل کل
- g من أجل كل x من R فإن 0 < (x) > 0 ومنه الدالة x متزايدة تماما على x .
  - جدول تغيرات 8:

- $g'(x) + \infty$ 
  - 3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة على مستمرة و متزايدة على المجال [0,94;0,96]

 $g(0.94) \times g(0.96) < 0$ :

g(x) = 0 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $\alpha = 0.94$  حيث :  $\alpha < 0.96$  حيث :  $\alpha < 0.96$ 

4) إشارة g على R:

| X قيم   | - ∞ | α | +∞ |
|---------|-----|---|----|
| إشارة 8 | -   | 0 | +  |

: لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلى  $\bullet$ 

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$$

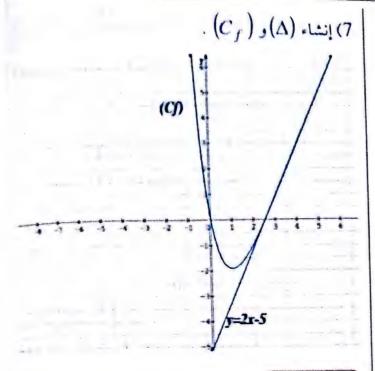
. R على f على (1) دراسة إشارة الدالة

| <i>x</i> مية     | - ∞ | 0 |   | 5/2 | +∞ |
|------------------|-----|---|---|-----|----|
| إشارة 2x - 5     | -   |   | - | 0   | +  |
| $1-e^{-x}$ إشارة | -   | 0 | + |     | +  |
| f(x) إشارة       | +   | 9 | - | 0   | +  |

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 5)(1 - e^{-x}) = +\infty (2$ 

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x - 5)(1 - e^{-x}) = +\infty$ 

3) من أجل كل عدد حقيقي X فإن:



### التمرين 11:

$$g(x) = 2 + \frac{x-1}{e^x} : R$$
دالة معرفة على  $R$ ب:  $\lim_{x \to \infty} g(x) = 2$ دالة معرفة على  $g(x) = 2$ دالة معرفة على المعرفة على الم

 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2 : 1$  ابين أن - 1

g أدرس تغيرات الدالة

2- بين أن g(x) = 0 تقبل حلا واحداα في المجال ] 0,38;-0,37 [

R على g(x) على -3

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{e^x}$$
:  $R$  also as  $R$  also  $R$   $Q$ 

ر $(C_r)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد  $\overrightarrow{(C_r)}$  و المتجانس (O;i,j)

ا- عين نهايتي f عند  $\infty$  – وعند  $\infty$  +.

( 
$$\lim xe^x = 0$$
 نقبل أن )

f'(x) = g(x): Rمن f من اجل کل f من اجل کل f من الدالة f و استنتج اتجاه تغیر الدالة

 $_{f}$  .  $_{f}$  شكل جدول تغيرات الدالة

y = 2x + 1 بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة  $+\infty$  عند  $+\infty$  عند  $+\infty$  عند  $+\infty$ 

$$f'(x) = (2)(1 - e^{-x}) + (e^{-x})(2x - 5)$$

$$f'(x) = 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x} : e^{-x}$$

$$e^{-x}(x) = e^{-x}(2e^{x} + 2x - 7) : e^{-x}$$

$$e^{-x}(x) = g(x).e^{-x} : e^{-x}$$

$$e^{-x}(x) = g(x).e^{-x}$$

$$e^{-x}(x)$$

| قيم ٪ | - ∞ | α           |   | +∞ |
|-------|-----|-------------|---|----|
| f'(x) | -   | þ           | + |    |
| f(x)  | +∞  |             |   | +∞ |
|       |     |             |   | *  |
|       |     | $f(\alpha)$ |   |    |

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$$
 (5

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 5) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 5)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2xe^{-x} = 0$$

 $\lim_{X\to-\infty} X.e^X = 0$ : أنها من الشكل

ومنه المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة y=2x-5 مقارب مائل ل $\begin{pmatrix} C_f \end{pmatrix}$  بجوار  $\begin{pmatrix} C_f \end{pmatrix}$ 

 $(\Delta)$  دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ ( $(\Delta)$ 

$$f(x)-(2x-5)=-(2x-5)e^{-x}$$
ندرس إشارة الفرق:

| قيم ٪                                    | $-\infty$ $\frac{5}{2}$ | +∞    |
|--|-------------------------|-------|
| إشارة 5 - 2x                             | -                       | +     |
| إشارة "-ع                                | +                       | +     |
| $-(2x-5)e^{-x}$                          | +                       | -     |
| وضعية (c <sub>f</sub> )<br>بالنسبة لـ(a) | ع<br>ع<br>غ.            | نحت آ |

### السدوال الأسيت واللوغارستمية

ر) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) عدد m حيث y = 2x+m عدد (T,) مستقبم معادلت حنبني .

 $(C_i)$  غاسا للمنحنى  $(T_m)$  عاسا للمنحنى  $(C_i)$ في نقطة 1 يطلب تعيين احداثبانها.

ردين أن  $(C_r)$  بقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيينها.

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1} : \text{if } \alpha = -6$$

$$(\alpha \approx -0.375)$$
. (نأخذ  $(C_i)_{i}$ ). (ناخذ -2.375)

### حل التعرين 11:

$$D_g = R$$
 و  $g(x) = 2 + \frac{x-1}{e^x}$  : ليينا

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2 + \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - \frac{1}{e^x} \right) = 2 \quad (1-1)$$

$$(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \to 0)$$
 by

دراسة تغيرات الدالة g:

$$g'(x) = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

| x     | - 00 |   | 2 | +∞ |
|-------|------|---|---|----|
| g'(x) |      | + | 0 | -  |

الدالة g منزايدة تماما على المجال [2:∞- [ و متناقصة تماما على المجال 2:+٥٠ المجال

واحدا  $\alpha$  أيات أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا واحدا  $\alpha$  في الجال ]0.38:-0.37 الجال

ر 2 ( 9(-0,37) يانه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحدا .  $g(\alpha) = 0$ : بحيث ] -0.38; -0.37[ بحيث  $\alpha$ 3- إشارة (g(x) على R.

| ŗ    | - ∞ | α | +∞ |
|------|-----|---|----|
| g(x) | _   | 0 | +  |

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{e^x}$$
: بالة معرفة على  $f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{e^x}$  دالة معرفة على  $f(x) = 1$ 

$$(\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = +\infty$$
 ) کن

$$\lim_{-x \to -\infty} \left(-xe^{-x}\right) = 0$$
 کن  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 

الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال R و لدينا:

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = 2 + \frac{x - 1}{e^x} = g(x)$$

g(x) هي من إشارة f'(x) إشارة

| X     |   | α | +∞ |
|-------|---|---|----|
| f'(x) | _ | 0 | +  |

: f الدالة f

| x     |     |                    | α | +∞      |
|-------|-----|--------------------|---|---------|
| f'(x) | *   |                    | 0 | +       |
| f(x)  | + 8 | $\int_{f(\alpha)}$ |   | +∞<br>* |

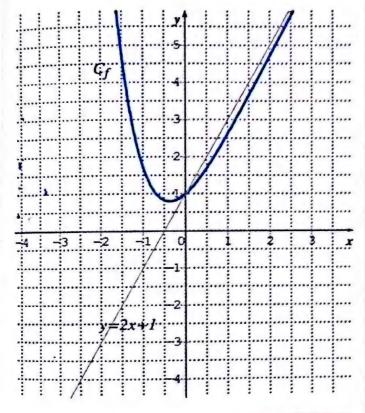
 $(C_f)$  المستقيم ( $\Delta$ ): y = 2x + 1 مقارب لـ (أ -3)

 $\lim (f(x) - (2x+1)) = 0$  aik  $\infty + \infty$  aik

### السدوال الأسياة واللوغاريتمية

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$
 : بالتعویض فی  $f(\alpha)$  نجد  $f(\alpha)$  نجد  $f(\alpha)$  خبر  $f(\alpha)$   $= 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$   $f(\alpha)$   $f(\alpha)$ 

$$f(-0,375) = \frac{2(-0,375)^2 + (-0,375) - 1}{(-0,375) - 1}$$
  
$$\approx 0,8977$$



### التعرين 12:

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال -2, +∞ كما يلى :

ان عددان a عددان  $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$  و عددان .

المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد  $(C_{f'})$  وحدة الطول  $(c_{n},i,j)$  وحدة الطول  $(c_{n},i,j)$ 

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة (-1,1) تتعي  $(C_f)$  إلى  $(C_f)$  و معامل توجيه المماس عند  $(C_f)$  يساوي  $(C_f)$ 

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (2x+1)) = \lim_{x \to +\infty} (-\frac{x}{e^x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$+ \infty \text{ sign}(C_f) = -\infty \text{ ($\Delta$)}; y = 2x+1 \text{ sign}(\Delta); y = 2x+1 \text{ sign}(\Delta) = 0$$

$$f(x) - (2x+1) = -\frac{x}{e^x} \text{ thus if } x = 0$$

$$f(x) - (2x+1) = -\frac{x}{e^x} \text{ sign}(\Delta) \text{ sign}(\Delta) = 0$$

$$f(x) - (2x+1) = -\frac{x}{e^x} = 0$$

| X                                | - 00                       | 0       | + 00        |
|----------------------------------|----------------------------|---------|-------------|
| $f(x) - (2x+1) = -\frac{x}{e^x}$ | +                          | 0       |             |
| الوضعية                          | $(\Delta)$ يقع فوق $(C_f)$ | لفت (Δ) | يقع $(C_f)$ |

$$m \in R$$
 حيث  $(T_m): y = 2x + m: ليكن -4$ 
 $f'(x) = 2 = g(x)$  معناه  $(C_f)$  معناه  $(T_m)$ 
 $I(1; f(1))$  معناه  $x = 1$  تكافئ  $g(x) - 2 = 0$ 
 $f(1) = 3 - e^{-1}$ 
حيث  $(T_m): y = 2(x - 1) + 3 - e^{-1} = 2x + 1 - e^{-1}$ 

$$m=1-e^{-1}$$
 وعليه  $f'$  قابلة الاشتقاق  $(C_f)$  -5  $f''(x)=g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$  : الدالة  $f''(x)=g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$  على المجال  $f''(x)=g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$  تكافئ  $f''(x)=0$   $f(2)=5-2e^{-2}\approx 4.72$  حيث  $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$  أن  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$  لدينا  $f''(\alpha)=0$  غان  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$  بها آن  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$  غان  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$  وعليه  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$  وعليه  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$  عليه  $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$ 

### السدوال الأسيسة واللوغاريتمية

العنبر الثالة العلدية في للمتغير الحقيقي ، المعرفة على المعرفة على المجال إحد - إكما يلي :

 $g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$  و  $g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$  نفس العلم السابق.

ار بین آن  $g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$  و عبر هذه النتیجة بیانیا.

$$\left(\lim_{n\to\infty}ue^n=0\right)_{\infty\to\infty}$$

ب/ أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها . g يين أن المنحنى g يغبل نقطة انعطاف g يطلب تعيين (احداثيها).

د/ أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة 1. هـ/ أرسم  $(C_g)$ .

[[] النكن العالمة المعرفة على المجال ]∞+2-] كما يلي :

$$K(x) = g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

### حل التعريين 12 :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$$
 (1)

$$:[-2,+\infty[$$
 تقبل الاشتقاق على المائدة أ

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$$

$$f'(x) = -(ax + b - a)e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = -(ax + a)e$$

$$\begin{cases} (-a+b)e+1=1 \\ -(-2a+b)e=-e^{-c^{2}} \end{cases} \begin{cases} f(-1)=1 \\ f'(-1)=-e^{-c^{2}} \end{cases}$$

$$f(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$
;  $\xi^{\dagger} b = -1$ ,  $\alpha = -1$ 

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$
 (11)

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left( -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \right) = 1^{-1}(1)$$

 $+\infty$  عند عند مقارب افقي عند  $(C_g)$  : التفسير y=1 معادلته

ب) دراسة تغيرات الدالة: g

 $g'(x) = xe^{-x} : [-2, +\infty[$  على  $g'(x) = xe^{-x} : [-2, +\infty[$  على g'(x) عن إشارة g'(x)

| x     | -2 | 0 | +∞ |
|-------|----|---|----|
| g'(x) |    | þ | +  |

g متناقصة تماما على [2,0] و متزايدة تماما على  $[2,+\infty]$  جدول تغيرات الدالة g.

| x     | -2     | 0 | +∞  |
|-------|--------|---|-----|
| f'(x) | -      | ф | +   |
| 1     | $+e^2$ |   | , 1 |
| f(x)  |        |   |     |

:  $[-2,+\infty[$  تقبل الاشتقاق على  $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ 

| х      | -2 |   | 1 | +∞ |
|--------|----|---|---|----|
| g''(x) |    | + | þ | -  |

الدالة المشتقة الثانية g'' انعدمت عند I وغيرت من إشارتها بجوار I إذن النقطة I  $(1;1-\frac{2}{e})$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_g)$ .

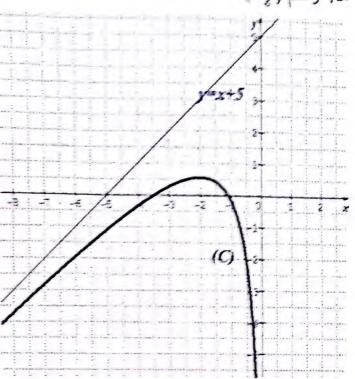
: I معادة الماس للمنحنى ( $C_g$ ) هند 1

(T): 
$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

$$y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$$
,  $y = \frac{1}{e}(x - 1) + 1 - \frac{2}{e}$ 

### السدوال الأسيسة واللوغاريتمية

 $:(C_g)_{max}$ 



K (III) تقبل الاشتقاق على إحد - 2 - إحيث:

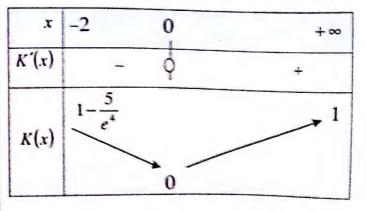
$$K'(x) = 2x \ g'(x^2)$$

$$K'(x) = 2xx^2e^{-x^2} = 2x^3e^{-x^2}$$

X هي إشارة K'(x) هي إشارة

K متناقصة تماما على المجال [2,0] و متزايدة تماما على المجال ]∞+,0]

جدول تغيرات K:



### النمرين 13.

لتكن f الدالة المعرفة على المجال  $f(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 

- ( $C_{j}$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعا، والمتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j})$ .
- نم فسر النتيجة هندسيا  $\lim_{x \to -\infty} f(x)$  ، ثم فسر النتيجة هندسيا .  $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

y = x + 5 أ- بيّن أن المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلة له: 5 + x + 5 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) بجوار  $\infty$ -.

 $(\Delta)$  بالنسبة للمستقيم بانحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم

- یین آن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلّین  $\alpha$  و  $\beta$  حیث  $\beta$  بین آن المعادلة  $\beta$  -3,5  $\alpha$   $\alpha$  -3,4
  - $(C_f)$  أنشئ المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم
  - $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$  أ- نعتبر النقطتين (6

 $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ 

ييّن أن  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$  معادلة ديكارتية للمستقيم .(AB)

 $M_0$  في نقطة  $(C_f)$  يمس المنحنى  $(C_f)$  في نقطة (AB) يطلب تعيين إحداثيتيها.

### حل التمرين 13:

النتيجة هندسيا:  $\lim_{x \to 0} f(x) f(x)$  أم التفسير النتيجة هندسيا:  $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[ x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$   $\lim_{x \to 0} \left[ 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$   $\text{Yo}: \infty$ 

### السدوال الأسية واللوغاريتمية

ومنه المنتقيم الذي معادلته x=0 مستقيم مقارب عمودي.  $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 

$$\lim_{x \to -\infty} (x+5) = -\infty \quad \lim_{x \to -\infty} \left[ 6Ln \left( \frac{x}{x-1} \right) \right] = 0 : \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[ x+5+6Ln \left( \frac{x}{x-1} \right) \right] = -\infty : \text{id}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[ x+5+6Ln \left( \frac{x}{x-1} \right) \right] = -\infty : \text{id}$$

، ]-∞;0[ من أجل كل عدد حقيقي 
$$x$$
 من  $x$  من  $x$  وإثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي  $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$ 

الدالة ر قابلة للاشتقاق على المجال ]0;∞-[و دالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 6 \cdot \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 6}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} : \emptyset$$

استناج اتجاه تغیرات الدالة f و تشکیل جدول تغیراتها: إشارة المشتقة من إشارة البسط  $x^2-x-6$  لأنه من أجل کل عدد حقیقی x من  $[0;\infty-[:0]]$ .

x = 3 ومنه x = -2 ومنه  $x^2 - x - 6 = 0$  وهومقبول أو x = -3 وهومرفوض.

وبالنالي: f متزايدة تماما على المجال  $[2-;\infty-[$  و f متناقصة [-2;0] متناقصة [-2;0] متناقصة

جدول التغيرات:

$$\begin{array}{c|cccc}
x & -\infty & -2 \\
f'(x) & + & & & \\
\hline
f(x) & & & & \\
\end{array}$$

y = x + 5 أ- إثبات أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة 3 هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم  $(\Delta)$  مستقيم مقارب مائل يعني أن:

. 
$$\lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - (x+5) \right] = 0$$

$$f(x) - (x+5) = 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) :$$
لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \left[ f(x) - (x+5) \right] = \lim_{x\to\infty} 6Ln \left( \frac{x}{x-1} \right) = Ln1 = 0$$
 إذن:  $y = x + 5$  أذو المعادلة ( $\Delta$ ) أذو المعادلة ( $C_f$ ) بجوار  $\infty$ .

 $(\Delta)$  والمستقيم والنسبية للمنحنى والمستقيم ( $(C_f)$ 

دراسة إشارة الفرق 
$$[f(x)-(x+5)]$$
: لدينا:  $f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$ 

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال ] $0;\infty-[$  يكون لدينا x>x-1 .

ومنه  $1 > \frac{x}{x-1}$  لأن (x-1) عدد سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه:  $2n + \frac{x}{x-1} < Ln$  وبالتالي

يقع تحت  $(C_f)$  يقع تحت f(x)-(x+5)<0 . ]- $\infty$ ;0[ المستقيم  $(\Delta)$  من أجل كل  $(\Delta)$  من المجال

eta إثبات أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلّين  $\alpha$  و  $\alpha$  ربات أن المعادلة  $\alpha$  -3,5 و  $\alpha$  -3,4 حيث  $\alpha$  -3,4 و  $\alpha$  -3,5 و  $\alpha$  -3,4 لدينا الدالة  $\alpha$  مستمرة و رتيبة تماما على المجال  $\alpha$  مستمرة و المجال  $\alpha$  -3,5;-3,4  $\alpha$  مستمرة و رتيبة تماما عليه :

$$f(-3,5) = -3,5+5+6\ln\left(\frac{3,5}{4,5}\right) \approx -0,007$$

$$f(-3,4) = -3,4+5+6\ln\left(\frac{3,4}{4,4}\right) \approx 0,053$$

$$f(-3,5) \times f(-3,4) < 0$$
وبالتالي وبالتالي 0

### المدوال الأسياة واللوغاريتمية

وم حسب مرده نه القيم المتوسطة المعادلة  $\alpha = 0$  القيم المتوسطة المعادلة  $\alpha = 0$  القيل حل  $\alpha = -3.5 < \alpha < -3.4$  من جهة أخرى دالة  $\alpha = 0$  مستمرة و رتيبة تماما على المجال

من بهه مرى و المجال -2;0 -1,1;-1 فالدالة f مستمرة و رتبية تماما عليه.

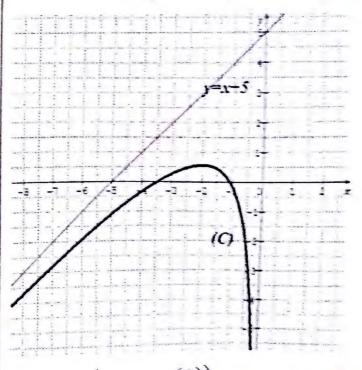
$$f(-1,1) = -1,1+5+6\ln\left(\frac{1,1}{2,1}\right) \approx 0.02$$

$$f(-1) = -1 + 5 + 6 \ln \left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.158$$

ويالتاني  $f(1) < f(1) \times f(1) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة f(x) = 0 تقبل حل  $\beta$  حيث:  $-1.1 < \beta < -1$ 

وعليه المعادلة f (x)=0 تقبل حلّين α و β حيث 3,5<α<-3,4- و --3,5.

 $(\Delta)$  والمستقيم ( $C_{j}$ ) والمستقيم ( $\Delta$ ):



$$A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
 عتبر النقطتين  $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$  و

إثبات أن  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$  إثبات أن (AB):

نعتبر النقطة M(x,y) نقطة من المستقيم  $\overline{AB}$  ومنه:  $\overline{AB}$   $\overline{AM}$ 

$$\overline{AM}$$
  $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3-6Ln\frac{3}{4} \end{pmatrix}$  و  $\overline{AB}$   $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  لدينا

نا: يعنى أن $\overrightarrow{AB}$  //  $\overrightarrow{AM}$ 

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1) = 0$$

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y - 3 - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي:  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$ 

 $(C_f)$  يمس المنحنى (AB) ي نقطة  $(C_f)$  يمس المنحنى  $(C_f)$  في نقطة (AB) يمس المنحنى  $(C_f)$  يعني (AB) عاس للمنحنى (AB) عاس المنحنى أن غما نفس معامل التوجيه أي  $(x) = \frac{1}{2}$  أن لهما نفس معامل التوجيه أي  $(x) = \frac{1}{2}$  تعني أن  $(x) = \frac{1}{2}$  تعني أن  $(x) = \frac{1}{2}$  وبالتالي:  $(x) = 2x^2 - x - 12 = x^2 - x$  وبالتالي:

### التعرين 14

 $g(x) = 1 - xe^x$  كما يلي: R كما يلي (I

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x)$
- ادرس اتجاه تغیر الدالة g، ثم شكّل جدول تغیراتها.
- $\alpha$  أ- بيّن أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا g(x) = 0 على المجال g(x) = 0.

g(x)ب- تحقق أن  $0.5 < \alpha < 0.6$  ، ثم استنتج إشارة

### السدوال الأسيسة واللوغاريتمية

ا]) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال  $[2:\infty-[$  كما يلي:  $(x-1)e^x-x-1$  تمثيلها البياني في  $(x-1)e^x-x-1$  المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (i;i;0).

- $\lim_{n\to\infty}f\left(x\right)\longrightarrow\mathbf{0}$
- انكن f مشتقة الدالة f ، بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي f من f وفإن: f f الله من f f استنج إشارة f f على المجال f f ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ين أن 
$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$
 ، ثم استنج حصر اللعدد

- $f(\alpha)$  (تدور النتائج إلى  $f(\alpha)$ ).
- y = -x 1 هو y = -x 1 هو y = -x 1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى y = -x 1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى y = -x 1 بجوار y = -x 1 هو ب- أدرس وضعية المنحنى y = -x 1 بالنسبة إلى y = -x 1
- $x_2$  و  $x_1$  تقبل حلّین  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_1$  المعادلة  $x_2$  المعادلة  $x_2$  المعادلة  $x_1$  = 0  $x_1$  المعادلة  $x_2$  = 0  $x_1$  = 0  $x_1$  = 0  $x_1$  = 0  $x_1$  = 0  $x_2$  = 0  $x_1$  = 0  $x_2$  = 0  $x_1$  = 0  $x_2$  = 0  $x_2$  = 0  $x_1$  = 0  $x_2$  = 0  $x_2$  = 0  $x_1$  = 0  $x_2$  = 0  $x_2$  = 0  $x_2$  = 0  $x_2$  = 0  $x_1$  = 0  $x_2$  = 0  $x_$

### حل التمرين 14:

 $g(x) = 1 - xe^{x}$  كما يلي: R كما يلي: R كما يلي: R

:  $\lim_{x \to +\infty} g(x)$   $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ 

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - xe^x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$$

- دراسة اتجاه تغیرات الدالة g وتشکیل جدول تغیراتها:
- g' دالة قابلة للاشتقاق على g' ودالتها المشتقة هي g' حيث:

$$g'(x) = -e^x - xe^x$$

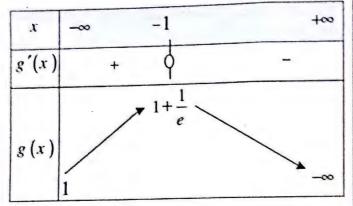
$$g'(x) = (-1-x)e^x$$

إشارة المشتقة من إشارة x – 1 - لأنه من اجل كل عدد

حقیقي: () × e¹.

لدينا x = -1 ومنه: x = -1 وعليه الدالة y = -1 متزايدة تماما على المجال x = -1 ومتناقصة تماما على المجال x = -1.

جدول التغيرات:



 $\alpha$  أ- إثبات أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا g(x) = 0 على المجال  $[-1;+\infty]$ :

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على  $-\infty;1+rac{1}{e}$  المجال  $-\infty;1+rac{1}{e}$  وتأخذ قيمها في المجال

g(x)=0 إلى  $\left[-\infty;1+\frac{1}{e}\right]$  و العدد صفر ينتمي إلى  $\left[-\infty;1+\frac{1}{e}\right]$ 

 $[-1;+\infty]$  على المجال على الحال ].

ب- التحقق أن g(x) = 0.5 واستنتاج إشارة g(x) = 0.5 على g(x) = 0.5 و المنتاج إشارة g(x) = 0.5 و يما أن لدينا: g(x) = 0.5 و g(x) = 0.5 و يما أن g(x) = 0.5 و يما أن g(x) = 0.5 و يما أن g(x) = 0.5 و يما أن

! (x ) إشارة

| x    | -∞ | α | +∞ |
|------|----|---|----|
| g(x) | +  | þ | _  |

:  $\lim_{x \to \infty} f(x)$  ——— (II

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x - x - 1 = +\infty$$

 $\lim_{x\to 1} (x-1)e^x = 0$  :ن

(2] = x من أجل كل عدد حقيقي x من  $(2; \infty - [:$ 

$$f'(x) = -g(x)$$
نان

### السدوال الأسياة واللوغاريتمية

 $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$  دالة قابلة للاشتقاق على  $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$  حيث:  $f'(x) = xe^x - 1 = -(-xe^x + 1)$  f'(x) = -g(x)

استنتاج إشارة f'(x) على المجال  $[2;\infty-[$  وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة g(x) وعليه:

| х        |   | α | +∞ |
|----------|---|---|----|
| f' إشارة | - | Ó | +  |

 $[\alpha, \alpha]$  متناقصة تماما على المجال  $[\alpha, \alpha]$ . و  $[\alpha, \alpha]$  متزايدة تماما على المجال  $[\alpha, \alpha]$ . جدول التغيرات:

| x     |    |   | α           | 2       |
|-------|----|---|-------------|---------|
| f'(x) |    | - | þ           | +       |
|       | +∞ |   |             |         |
|       |    |   |             | $e^2-3$ |
| f(x)  |    |   |             |         |
|       |    |   | $f(\alpha)$ |         |

لدينا : 
$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$
 اثبات أن  $G(\alpha)$ 

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)e^{\alpha} - \alpha - 1$$

 $1-\alpha e^{\alpha}=0$  :  $g(\alpha)=0$  أي:  $g(\alpha)=0$  من جهة أخرى لدينا  $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$  : وبالتالي:

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1$$

 $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha}$  :وعليه  $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$ 

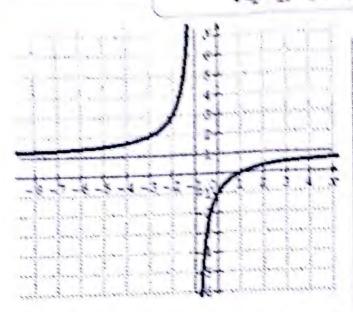
$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$
 بالتعویض نجد:

 $(\Delta)$  بالنسبة إلى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ : [f(x)-(-x-1)]: [f(x)-(-x-1)]:  $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x:$ لدينا:  $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x:$ إشارة (x-1):

f(x)-(-x-1)<0 المجال [ $-\infty$ , 1] المجال المنحنى  $-\infty$ , 1] المجال و بالتالي المنحنى ( $-\infty$ , 2) يقع تحت المستقيم ( $-\infty$ ) وعلى المجال و بالتالي المنحنى [ $-\infty$ , 2] يكون لدينا  $-\infty$ , 2 وبالتالي المنحنى ( $-\infty$ , 2) يقع فوق المستقيم ( $-\infty$ ). المنحنى ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) في النقطة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) في النقطة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ , 2) يقطع المستقيم ( $-\infty$ ) ألم المنافقة ( $-\infty$ ) ألم

أ- إثبات أن المعادلة 0 = 0 (x) = 0 تقبل حلّين 1x و 2x و 1,5
 حيث 1,5 < x 2 < 1,6 و 1,6 < x 1 < -1,5</li>
 لدينا: 0,08 = (-1,6) = 0,08 و (-1,5) = -0.06
 متناقصة تماما على المجال [-1.6;-1.5]
 و 0 > 0 < (-1,5) × f (-1,6) < 0</li>

إذن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا x حيث: -1.6 < x حيث -1.5 < x حسب مبرهنة القيم المتوسطة.



11) لتكن الدالة كالمدينة على المجال إعجال إن

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (رح) المنحني المعثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامه.

و المتجانس (i,i,j).
ا. أحسب(x) ريستا و (x) ريستا ، فسر المتيجين . Lundia

2. أبين أنه من أجل كل علد حقيقي ٢ من المجال إ

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

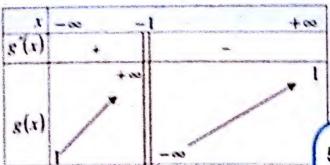
ب. احسب (x) م و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة ع.

3. أ. باستعمال الجزء 1) السؤال ج. هين إشارة العبارة

. ] litted the  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 

### حل التمرين 15:

ا. تشكيل جدول تغيرات الدالة ع :



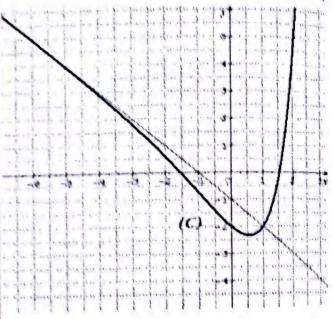
f (1.5) = -0.26 + f (1.6) = 0.37 byl م متناقصة تماما على المجال (1,5;1,6)  $f(1.5) \times f(1.6) < 0$ إذن المعادلة ( a ) = ( x ) و تقبل حلا و حيدا و د حيث

1.5 < ، > 1.6 حسب مبرهنة القيم المتوسطة ومنه نستنتج

ان المنحني ( C, ) يقطع محور الفواصل في نقطتين هما

 $M_{2}(x_{2};0) M_{1}(x_{i};0)$ 

. (C, ) و (A) و اناء



ا) نعتبر الدالة العددية  $\{-1\}$  المعرفة على كما يلي : و  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  مثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

 $\cdot$  (o;i;j) المعلم المتعامد و المتجانس

كما يوضحه الشكل المقابل.

أ. شكل جدول تغيرات الدالة ع. .

ب. حل بيانيا المتراجحة 0 < g(x) .

ج. عين بيانيا قيم X التي يكون من أجلها 1 > (x) < 0

ب. حل بيانيا المتراجعة 9(x)>0

: الحل البياني للمتراجحة g(x) > 0 هو

 $x \in [-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ 

0 < g(x) < 1 ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها

 $x \in ]1;+\infty[ : U \ 0 < g(x) < 1]$ من البيان [I] المعرفة على المجال f المعرفة على المجال التكن الدالة f

 $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 

 $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$  1.

و تفسير التيجتين هندسيا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x-1}{x+1} + \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right] = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \left[ \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الساني:

x=1. مستقيم مقارب عمودي يوازي (yy') بجوار (x-1)xx' مستقيم مقارب أفقى يوازي xx').

2. أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
: ]1;+ $\infty$ [

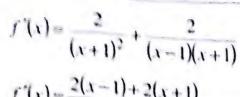
الدالة ع قابلة للإشتقاق على المجال]∞+;1 [ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

.. حساب 'f و دراسة إشارتها:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال ]∞+;1 [ و دالتها

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$



$$f''(x) = \frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

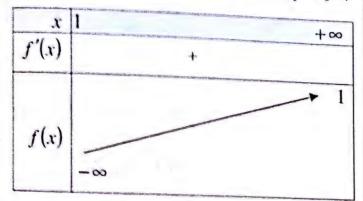
$$\vdots \delta G(x) = 1 \delta G(x)$$

دراسة إشارة المشتقة : بها أن احد فإن :

$$\frac{4x}{(x+1)^2} > 0$$
  $0 < x - 1 > 0$ 

: 1,+∞

f'(x) > 0 و بالتالي الدالة f متزايدة ثماما على المجال f'(x) > 0جدول تغيرات الدالة 1:



: ] انجال المجالة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  على المجال ] 3.  $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$  الدينا: x > 1 عا سبق من أجل و نعلم أن a ∈ ]0,1 [ لا ln a < 0 و بالتالي : ا و بالتالي إشارة العبارة سالبة.  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$ 

### التمرين 16:

 $I = \left| \frac{1}{2} + \infty \right|$  لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال (I  $(C_1)$  و ليكن  $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$ : تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(o,i,\bar{j})$ .

### السدوال الأسيسة واللوغاريتمية

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

f متزایدة تماما علی المجال f ثم شکل f بین آن الداله f متزایدة تماما علی المجال f ثم شکل جدول تغیراتها .

جدون المجان المعادلة النقطة  $(C_f)$  التي يكون فيها المهاس موازيا  $(C_f)$  التي يكون فيها المهاس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة (d)

f(x) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة f(x) على الشكل  $f(x) = \ln(x+a) + b$  حيث a و على الشكل  $f(x) = \ln(x+a) + b$  عددان حقيقيان يطلب تعيينها .

ب) استنج أنه يمكن رسم  $\binom{C}{f}$  انطلاقا من  $\binom{C}{f}$  منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبرية  $\binom{C}{f}$  ثم ارسم  $\binom{C}{f}$  و  $\binom{C}{f}$ .

I نعتبر الدالة g العددية المعرفة على المجال I

$$g(x) = f(x) - x : =$$

 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ : ثم بين أن  $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x)$  احسب (1)

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

قبل في 
$$g(x) = 0$$
 ثم بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في

.  $2 < \alpha < 3$ : المجال  $\frac{3}{2}$  حلا وحيدا  $\alpha$  . تحقق أن  $\frac{3}{2}$  ,  $+\infty$ 

$$\left[\frac{1}{2},5\right]$$
 ب ارسم  $\left(C_g\right)$  منحنى الدالة  $g$  على المجال المابق .

استنتج إشارة g(x) على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى (d).

1,lphaبرهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال [0,lpha] برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي f(x) بنتمي إلى المجال [0,lpha]

نسمي  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N^*$  كما يلي (III) نسمي  $u_n = f \bigg( 1 + \frac{1}{2n} \bigg)$ 

التي من أجلها يكون n عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون  $u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$ 

احسب بدلالة 
$$n$$
 المجموع  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 

### حل التمرين 16 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} : الدالة f'(x) = \frac{2}{2x-1} : الدالة f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$e \quad \text{ also in the point of the property of$$

| х     | 1/2 | +∞ |
|-------|-----|----|
| f'(x) | +   |    |
| f(x)  |     | +∞ |

(3) كي يكون المهاس موازيا للمنصف الأول يجب أن يتحقق ما يلي  $(x_0) = 1$  حيث  $(x_0) = 1$  فاصلة النقطة المطلوبة .  $(x_0) = 1$  لدينا  $(x_0) = 1$  تعني  $(x_0) = 1$  أي لدينا من أجل كل  $(x_0) = 1$  من  $(x_0) = 1$  أي لدينا من أجل كل  $(x_0) = 1$ 

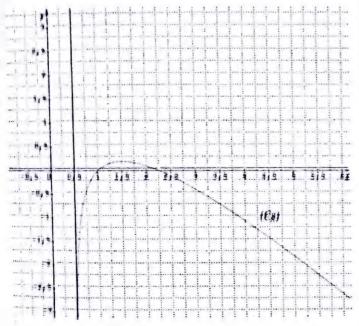
$$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
 $=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=\ln(2e)+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 
 $b=\ln 2e$  و  $a=-\frac{1}{2}$  : و منه :  $f(x)=\ln(x+a)+b$  فإن  $f(x)=\ln(x+a)+b$  مو صورة (C<sub>f</sub>) بالانسحاب الذي شعاعه  $f(x)=\ln(x+a)+b$  هو صورة (C<sub>f</sub>) بالانسحاب الذي شعاعه  $f(x)=\ln(x+a)+b$  و بالتالي يكون رسم (C<sub>f</sub>) و (C<sub>f</sub>) حيث :  $f(x)=\ln(x+a)+b$ 

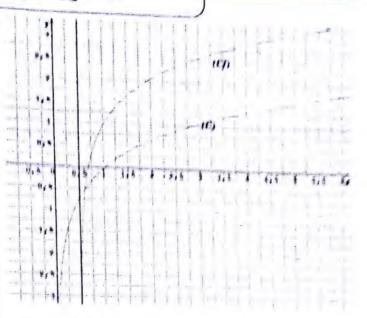
$$\left[\frac{3}{2},+\infty\right]$$
 الدالة  $g$  رنيبة تماما على المجال  $g(1)=0$  (3 و بالتالي صورة المجال  $\left[\frac{3}{2},+\infty\right]$  بالدالة  $g$  همي المجال .  $\left[-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$ 

و بها أن 
$$0 < 2 + \ln 2 > 0$$
 ومنه حسب نظرية الفيم المتوسطة  $\frac{3}{2} + \infty$  من المجال  $\frac{3}{2} = 2$ 

$$[2.3]$$
 الدالة  $[3]$  ورتيبة تماما على المجال  $[3]$  ولدينا  $[3]$  و بها أن  $[3]$  و بها أن  $[3]$  و بها أن  $[3]$ 

$$:\left( C_{g}
ight)$$
 رسم (ب





$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} 1 + \ln(2x - 1) - x = -\infty (1(11 + 1))$$

$$\ln 2e \approx 1,7 : 2e \approx 1,$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على 1 و لدينا:

$$g'(x) = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

$$x < \frac{3}{2}$$
 لا  $g'(x) > 0$ : حيث  $x = \frac{3}{2}$  تعني  $g'(x) = 0$ 

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$
 لا  $g'(x) < 0$ 

و منه جدول تغير الدالة g يكون كما يلي :

| х     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$          | +∞    |
|-------|---------------|------------------------|-------|
| g'(x) | +             | 0                      | -     |
| g(x)  |               | $-\frac{1}{2} + \ln 2$ | - 200 |

وفسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

 $(\Delta)$  ين أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاريين (3)

. y = x + 1 و y = x و الترتيب y = x + 1

 $(\Delta')$  ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

4) أثبت أن النقطة  $\left(0,\frac{1}{2}\right)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $\left(C_{f}\right)$ .

) بين أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $-1.4 < \beta < -1.3$  و  $1 < \alpha < 1$ 

 $(C_f)$  ب هل توجد مماسات لـ:  $(C_f)$  توازي المستقيم  $(\Delta)$   $(\Delta')$  و ارسم  $(\Delta)$  .

### حل التمرين 17:

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad (1)$ 

 $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty \quad ($ 

هذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة x=0 مستقيم مقارب للمنحنى  $\binom{C_f}{}$ .

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على مجالي تعريفها و لدينا :

$$f'(x) > 0$$
 وعليه  $f'(x) = 1 + \frac{e^x(e^x)}{(e^x - 1)^2}$ 

إذن الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها و يكون جدول تغيرات الدالة كما يلى :

| x     |     | 0   |   | +∞  |
|-------|-----|-----|---|-----|
| f'(x) | +   |     | + |     |
|       | +∞  | ·   |   | +00 |
| f(x)  |     |     |   |     |
| ) (~) | -00 | -00 |   |     |

 $(1, \alpha)$  و بالتالي من أجل  $f(1) \le f(x) \le f(\alpha)$  على  $f(1) \le f(x) \le f(\alpha)$  و لكن :  $f(1) \le f(x) \le f(\alpha)$  نجد  $f(1) \le f(x) \le \alpha$  و لكن :  $f(1) \le f(x) \le \alpha$  و منه f(1) = 1 و لكن :  $f(1) \le f(x) \le \alpha$  و منه f(1) = 1 و لكن :  $f(1) \le f(1) \le \alpha$  و منه  $f(1) \le f(1) \le \alpha$  و منه f(

 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2\times 1}\right)$  (2 +1+\ln\left(1 + \frac{1}{2\times 2}\right) + \dots + 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2\times n}\right)

 $= n + \ln\left(\frac{3}{2\times1}\right) + \ln\left(\frac{5}{2\times2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n+1}{2\times n}\right)$  $= n + \ln\frac{3\times5\times7\times\dots\times(2n+1)}{2^2\times1\times2\times3\times\dots\times n}$ 

 $S_n = n + \ln \frac{3 \times 5 \times 7 \times ... \times (2n+1) \times 2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}{2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times ... \times n)^2 \times 2^n}$ 

$$= n + \ln \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

### التمرين 17:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على  $R^*$  كما يلي :  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$  نرمز بـ  $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$  المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (0, i, j) .  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$  .  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$  .  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ 

 $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ i.i.d.} (1/3)$   $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$   $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (-1 - \frac{1}{e^x - 1}) = 0$   $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$   $\lim_{x$ 

| X       | -∞ | 0 | +∞ |
|---------|----|---|----|
| _ 1     | +  |   | -  |
| $e^x-1$ |    |   |    |

إذن في المجال  $[0,+\infty]$  يكون  $[0,+\infty]$  فوق  $[0,+\infty]$  و في المجال  $[0,+\infty]$  يكون  $[0,+\infty]$  تحت  $[0,+\infty]$  المجال  $[0,+\infty]$  بالنسبة إلى  $[0,+\infty]$  ندرس الفرق  $[0,+\infty]$  بالنسبة إلى  $[0,+\infty]$  ندرس الفرق  $[0,+\infty]$  وعليه  $[0,+\infty]$  وعليه  $[0,+\infty]$ 

| х                    | -∞ | 0 | +∞ |
|----------------------|----|---|----|
| $-\frac{e^x}{e^x-1}$ | +  |   | -  |

إذن في المجال  $]0. \infty - [$  و في المجال يكون  $(C_f)$  فوق  $(\Delta')$  .  $(\Delta')$  عتب  $(\Delta')$  .  $[0. + \infty]$  يكون  $(\Delta')$  عبب  $(\Delta')$  المنقطة  $(\Delta')$  المنقطة  $(\Delta')$  المناظرة بالنسبة إلى المعدد  $(\Delta')$  و هو محقق ، و من أجل كل  $(\Delta')$  من  $(\Delta')$  المعدد  $(\Delta')$  و هو محقق ، و من أجل كل  $(\Delta')$  من  $(\Delta')$  المحدد  $(\Delta')$  و هو محقق ، و من أجل كل  $(\Delta')$  من  $(\Delta')$ 

| $f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^{x}-1}$                             | لد<br>- |
|--|---------|
| $f(-x)+f(x) = -\frac{e^x}{1-e^x} - \frac{1}{e^x - 1}$                              |         |
| $f(-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1} = 1$                       |         |
| $e^-$ ا $e^-$ ا $C_f$ . $\omega$ هي مركز تناظر $\omega$ . $\omega$ النقطة $\omega$ | لم      |

(5) أ) الدالة f رتيبة تماما على المجال  $[\ln 2,1]$  و لدينا:  $f(1)\approx 0.42\approx f(1)f(\ln 2)<0$  و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه  $f(\ln 2)\approx -0.31$ 

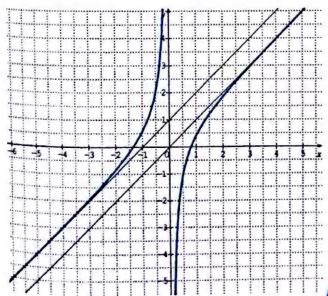
يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال  $[\ln 2,1]$  بحيث : eta و بنفس الطريقة نثبت وجود العدد الحقيقي f(lpha)=0 من المجال f(eta)=0 بحيث : f(eta)=0 بحيث : f(eta)=0 بحيث : f(eta)=0 بكاسات  $f(C_f)$  التي توازي المستقيم  $f(C_f)$  .

$$1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$$
 أي  $f'(x) = 1$ 

 $R^*$ أي  $\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=0$  و هي معادلة ليست لها حلول في

 $\Delta$  عا يعني أنه لا توجد مماسات توازي  $\Delta$ .

ج) الرسم:



م دالة عددية معرفة على ]∞+;1 - [ كما يلي : h

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) \int_{x \to -1}^{\infty} h(x) \int_{x \to -1}^{\infty} h(x) dx$$

 $[-1;+\infty]$ ين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال  $[-1;+\infty]$ 

$$h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$
 و استنتج اتجاه تغیر الداله  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$  ثم أنجز جدول تغیراتها .

h(x) احسب قيم h(0) واستنتج إشارة h(0) حسب ويم الجزء الثاني:

: كما يلي ] $-1;+\infty$  كما يلي المعرفة على إلى الدالة المعرفة على

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نسمى  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم  $\left(o;ec{i}\;;ec{j}
ight)$ متعامد ومتجانس

اً أحسب  $\lim\limits_{x\stackrel{
ightharpoonup}{-}-1}f(x)$  ثم فسر هذه التتيجة .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
 أنتيجة المنتخدام النتيجة

 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 

.  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$  استنتج

 $\lim_{x\to +\infty} [f(x)-(x-1)]$  واستنتج وجود

.  $\left(C_f
ight)$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى

 $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب الماثل.

:]- ا $+\infty$ [الجال] من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

.  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ 

y=2 يقطع المستقيم ذو المعادلة  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة



عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 أ

 $(C_f)$  أرسم (4

### حل التمرين 18

الجزء الأول:

: كما يلي ] $-1;+\infty$  كما يلي الله عددية معرفة على h $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ 

 $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -1} h(x) = -\infty \quad (1)$ 

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$]-1;+\infty[:h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

 $:h'(x)\succ 0$  ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال . -1;+∞

> .  $-1;+\infty$  متزايدة تماما على المجال h متزايدة الماء المجال جدول تغيرات الدالة h:

| +∞ |
|----|
|    |

h(0) = 0 (3)

: 410 9

| قيم 🗴 | -1 | 0 | +∞ |
|-------|----|---|----|
| إشارة |    |   |    |
| h(x)  |    | T | +  |

### الجزء الثاني:

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty /1(1$$

$$x=-1$$
 : ومنه  $\binom{C_f}{r}$  معادلته

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
: ب/ إثبات أن

$$x = e^X$$
: نإن  $\ln x = X$ 

$$X \to +\infty$$
:  $iji x \to +\infty$ :  $iji$ 

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty / =$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left( -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

ومنه يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  معادلته : y = x - 1

: 
$$f(x) - (x - 1)$$
: ها ندرس إشارة

$$f(x)-(x-1)=-\frac{\ln(x+1)}{x-1}$$

| قیم X              | -1 | 0 | +∞ |
|--------------------|----|---|----|
| إشارة: (ln(x−1     | -  | 0 | +  |
| إشارة : x−1        | +  |   | +  |
| f(x)-(x-1) : إشارة | +  | 0 | -  |

یقع فوق المقارب المائل .  $x \in ]-1;0[$  لم  $x \in ]-1;0[$  لم  $x \in ]0;+\infty[$  لم المائل .

| يقطع المقارب المائل. | $(C_f)$ نإن | x = 0 u |
|----------------------|-------------|---------|
|----------------------|-------------|---------|

$$[-1;+\infty]$$
 من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال ) من أجل كل

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

### : f جدول تغیرات

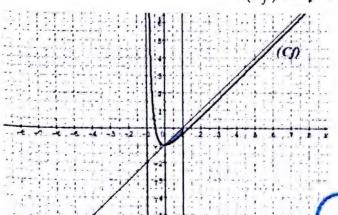
| x قيم | -1  |   | 0 |   | +∞ |
|-------|-----|---|---|---|----|
| f'(x) |     | - | þ | + |    |
| f(x)  | +∞、 | \ |   | / | +∞ |
|       | =   |   | 1 |   |    |

3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة f مستمرة و متزايدة على [3,3;3,4]

$$f(3,4) = 2,06$$
  $f(3,3) = 1,96$ 

$$f(3,3) \prec f(2) \prec f(3,4)$$
 : أي

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة y = 2 عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 إنشاء  $(C_f)$ :



### السدوال الأسيسة واللوغاريتمية

 $h(x) = e^x - 2x$  : كما يلي: R كما يلي القدم / احب نهايات الدالة ال عند ٥٥ - و ٠٠٠ . ب/ ادرس تغيرات الدالة / ثم شكل جدول تغيراتها .

ما استناج أنه من أجل كل عدد حقيقي X فإن:  $e^x - 2x \ge 2(1 - \ln 2)$ 

 $g(x) = x.e^x - 2e^x + 2$  يلي: R كما يلي: R والله معرفة على R

 $\lim_{x\to\infty} x.e^x = 0$ : فأثبت أن  $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  الم

(1 = -x : 0 = 1).

لم استنتج نهاية الدالة ع عند ∞ - . x فإن: x فإن: x فإن: x

ثم أحسب نهاية الدالة  $g(x) = e^x \cdot (x - 2 + 2e^{-x})$ 

ج/ ادرس تغيرات الدالة ع ثم شكل جدول تغيراتها .  $\alpha$  المادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا g(x). 1,5 < a < 1,7:4

x حسب قیم g(x) دم استنتج اشارة g(0) حسب قیم g(0). R 50

 $]-\infty; \ln 2]$  المجال  $f(x) = \frac{-e^x + 4x - 2}{e^x - 2x}$ : کما يلي R کما يلي  $f(x) = \frac{-e^x + 4x - 2}{e^x - 2x}$ 

ولبكن(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد . 2cm ومنجانس (o; I; J) ، وحدة الطول هي

ا/ احسب نهایات الدالة f عند  $\infty$  – و  $\infty$  + وفسر التالج بهائها .

ب/ بين اله من اجل كل عدد حقيقي X فإن:

$$f$$
 الدالة  $f'(x) = \frac{-2.g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ 

والمكل جدول تغيرانها.

ج/ • عين إحداثيات نقطة تقاطع (٥) والمستقمع (١)  $(\Delta)$  الذي معادلته V=-2 ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ  $(\Delta)$  . عين إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (۵) المنه معادلته y = -1 ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة y = -1د/ بین آن:  $f(\alpha) = \frac{-2\alpha+3}{\alpha-1}$  ثم استنج حصراً

ه/ انشئ (C).

 $f(\alpha)$  للعدد

و/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي 11 بيانيا عدد

و إشارة حلول المعادلة:

$$(m+1)e^x - 2(m+2)x + 2 = 0$$

### حل التمرين 19:

 $h(x) = e^x - 2x$  : کما یلی R کما یلی h دالة معرفة علی h $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} \left( e^x - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 2 \right) / 1$ 

 $=+\infty$ ,  $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$ 

 $h'(x) = e^{x} - 2$ : فإن x فاعدد حقيقي x فابن xومنه: h متزايدة على المجال  $[\ln 2; +\infty[$  ومتناقصة على جدول التغيرات:

| نيم ۲.     | - ∞ | ln 2       |   | +∞ |
|------------|-----|------------|---|----|
| h'(x)اشارة | -   | 0          | + |    |
| h(x)       | +∞  | 2 – 2 ln 2 | / | +∞ |

### الدوال الأسية واللوغاريتمية

جر/ نلاحظ من تغيرات الدالة h أن للدالة قيمة حدية صغرى وتساوي  $2 - 2 \ln 2$  لما  $x = \ln 2$  فرمنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$e^x - 2x \ge 2(1 - \ln 2)$$
 أي  $h(x) \ge 2(1 - \ln 2)$ 

$$g(x)=x.e^x-2e^x+2$$
 دالة معرفة على  $R$  كما يلي:  $g$   $Q$  دالة معرفة على  $R$  كما يلي:  $g$   $Q$  دالة معرفة على  $R$  كما يلي:  $g$   $Q$  دالة معرفة على  $R$   $A$   $A$  دالة معرفة على  $R$   $A$   $A$  دالة معرفة على  $R$   $A$  دالة معرفة على  $R$   $A$  دالة معرفة على  $R$  دالة على  $R$  دالة على  $R$  دالة معرفة على  $R$  دالة معرفة على  $R$  دالة على  $R$  دالة

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = \lim_{t \to +\infty} -t \cdot e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$$

$$\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty \text{ if }\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( x \cdot e^x - 2e^x + 2 \right) = 2$$
ولدينا: 2

ب/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي 
$$x$$
 فإن:  $y$ 

$$g(x) = x \cdot e^x - 2e^x + 2 = e^x \cdot (x - 2 + 2e^{-x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

$$g'(x)=e^{x}(x-1)$$
: فإن  $x$  عدد حقيقي  $x$  فإن أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $x$  ومنه  $x$  متزايدة على المجال  $x$  متزايد

### جدول التغيرات:

| قيم X       | - ∞ | 1   |   | +∞ |
|-------------|-----|-----|---|----|
| g'(x) إشارة | -   | 0   | + |    |
| g(x)        | 2   | 2-e | / | +∞ |

د/ نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال [1.5;1.7]

و 0.2- g(1.7) < 0 و g(1.7) = 0.3 و g(1.7) < 0 و g(1.7) = 0.3 و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $\alpha < 1.7$  هـ/  $\alpha < 0$ 

| قيم ٪      | - ∞ | 0 |   | α | +∞ |
|------------|-----|---|---|---|----|
| g(x) إشارة | +   | 6 | _ | 7 | +  |

| x قيم       | - ∞ | 0 |   | α | +∞ |
|-------------|-----|---|---|---|----|
| f'(x) إشارة | _   | 0 | + | 0 | _  |

جدول التغيرات:

| x قيم       | - ∞ | 0   | α           | +∞ |
|-------------|-----|-----|-------------|----|
| g'(x) إشارة | _   | 0 + | 6           | _  |
| f(x)        | -2  | _3/ | $f(\alpha)$ | -1 |

$$e^{x}-2=0$$
 ومنه  $\frac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}=-2$  /ج

 $x = \ln 2$ 

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم  $(\Delta)$  الذي

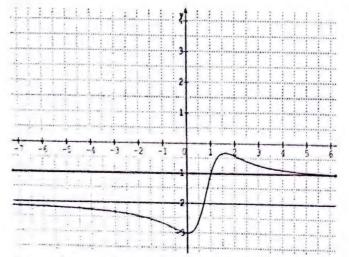
 $(\ln 2; -2)$  هی: y = -2

### الدوال الأسية واللوغاريتمية

حصر 
$$f(\alpha)$$
 : (باستعمال خواص الحصر نجد:  $-0.8 < f(\alpha) < 0$  )

 $-3 > -2\alpha > -3.4$  ومنه:  $1,5 < \alpha < 1,7$  ومنه:  $0 > -2\alpha + 3 > -0.4$  ومنه:  $0 > -2\alpha + 3 < 0$  ومنه:  $-0.4 < -2\alpha + 3 < 0$ 

$$0.5 < \alpha - 1 < 0.7$$
 ومنه:  $0.5 < \alpha < 1.7$  ومنه:  $0.5 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0.5}$  ومنه:  $0.5 < \alpha < 1.7$  ومنه:  $0.5 < \alpha < 1.7$ 



$$(m+1)e^{x}-2(m+2).x+2=0$$
 : ( $m+1$ ). $e^{x}-2(m+2).x+2=0$  : للينا :  $m.e^{x}-2(m+2).x+2=0$  : أي :  $m.e^{x}+e^{x}-2m.x-4x+2=0$  : ومنه :  $m.(e^{x}-2x)=-e^{x}+4x-2$  ومنه :  $m=\frac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}$ 

$$x=1$$
 ومنه  $2x-2=0$  ومنه  $\frac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}=-1$  ومنه  $(\Delta')$  ومنه إحداثيات نقطة تقاطع  $(C)$  والمستقيم  $(1;-1)$  الذي  $y=-1$  معادلته  $y=-1$  هي:  $(1;-1)$  النسبة لـ  $(x)-y=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$ :  $(x)$ 

| قيم X                       | - ∞ | ln 2 |   | +∞  |
|-----------------------------|-----|------|---|-----|
| $e^x - 2$ إشارة             | -   | 0    | + |     |
| $e^x - 2x$ إشارة            | +   |      | + |     |
| f(x) - y إشارة              | -   | 0    | + |     |
| وضعية (C)<br>بالنسبة لـ (Δ) | تحت | يقطع |   | فوق |

$$f(x)-y=\frac{2x-2}{e^x-2x}$$
: ( $\Delta'$ ) بالنسبة لـ ( $C$ ) دراسة وضعية

| قيم x                 | - & | 1    | +∞  |
|-----------------------|-----|------|-----|
| إشارة 2x-2            | _   | þ    | +   |
| $e^x - 2x$ إشارة      | +   |      | +   |
| f(x) - y إشارة        | _   | 9    | +   |
| وضعية (C)             | تحت | يقطع | فوق |
| $(\Delta')$ بالنسبة ل |     |      |     |

$$f(\alpha) = \frac{-e^{\alpha} + 4\alpha - 2}{e^{\alpha} - 2\alpha}.....(1)/3$$

$$e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 2}$$

$$g(\alpha) = \alpha \cdot e^{\alpha} - 2e^{\alpha} + 2 = 0$$

$$(1) \text{ نعوض } e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 2}$$

$$e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 2}$$

$$e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 2}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2\alpha + 3}{\alpha - 1}$$

### السدوال الأسيات واللوغاريتميات

ومنه f(x)=m و حامول المعادلة f(x)=m بيانيا هي فواصل نقط تقاطع f(C) والمستقيم الذي معادلته y=m لما [C] المعادلة لا تقبل حلولا.

- لما 3= المعادلة تقبل حلا معدوما لم
- لا  $m \in ]-3;-1$  المادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة.
  - لل  $m \in [-1;0]$  المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
  - له  $m \in ]0; f(\alpha)$  المعادلة تقبل حلان موجبان تماما.
    - لما  $m=f(\alpha)$  المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
    - لا  $[f(\alpha);+\infty]$  المعادلة لا تقبل حلولا.

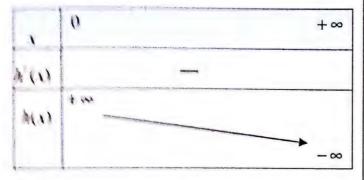
### حل التمريين 20

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = 3 - 3x^2 - 2\ln x : \lim_{x \to \infty} h(x) = -\infty \cdot \lim_{x \to \infty} h(x) = +\infty -1$$

2- اتجاه تغير الدالة h : الدالة h قابلة الاشتقاق على المعالي ] +;0[ و لدينا :

$$h'(x) = -6x^2 - \frac{2}{x} = \frac{-2(3x^2 + 1)}{x}$$

. It and to take in it is the illustration h'(x) < 0 if it



: h(x) إشارة h(1) = 0 - 3

| 0    |   | $\alpha$ | +∞ |
|------|---|----------|----|
|      | eren er |          |    |
| Miss | +   | 0        | -  |

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$
:نعتبر: (II

 $D_f = ]0;+\infty[$  حيث

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty (1 - 1)$ 

x = 0مقارب معادلته

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ (\dot{}$$

2- أ) الدالة كرقابلة الاشتقاق على المجال إصديما ( و لديها :

$$f(x) = \frac{1-6x+1)(2x)-2(-3x^2+x-1)}{4x^2} + \frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}$$

### h (I دالة معرفة على المجال]0;+∞ إب:

 $h(x) = 3 - 3x^2 - 2 \ln x$ 

1- عين نهايتي *ا* عند () و عند ∞+.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة h

. ] 0;+∞ [ علی h(x) علی h(1) علی -3

(اب: 1) و دالة معرفة على المجال ] 0;+∞ (اب: 5)

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

المتعامد ( $C_{j}$ ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O; i, j)

السب النتيجة هندسيا. السب النتيجة هندسيا.  $\lim_{x\to 0} f(x)$ 

 $\lim_{x \to \infty} f(x) + \lim_{x \to \infty} f(x)$ 

 $f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$  ابين انه من اجل كل x من الجال (1-2)

. f'(x) ثم استنتج إشارة  $]0;+\infty[$ 

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

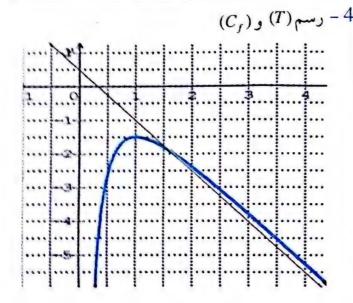
 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$  is the proof of the state  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$  is the state  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ .

(T) أدرس وضعية المنحنى  $(C_{f})$  بالنسبة للمستقيم

-4  $(C_1)_{\mathfrak{g}}(T)$ 

### السدوال الأسية واللوغاريتمية

| .1   | 0               | √e | + 00                    |
|--|-----------------|----|-------------------------|
| $f(x) - y = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ | -               | 0  | +                       |
| المراسعة                                     | (D) يقع تحت (D) | D) | $(C_f)$ يقع فوق $(C_f)$ |



$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 2}{4x^2} + \frac{4 - 4\ln x}{4x^2}$$
 أي  $f'(x) = \frac{-6x^2 + 6 - 4\ln x}{4x^2}$ 

$$= \frac{-3x^2 + 3 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$
اثارة  $f'(x)$  هي من إشارة  $f'(x)$ 

| x     | 0 |   | α | +∞ |
|-------|---|---|---|----|
| f'(x) |   | + | 0 | _  |

f : f الدالة

| х     | 0 | α           | + ∞         |
|-------|---|-------------|-------------|
| f'(x) | + | 0           | _           |
| f(x)  |   | $f(\alpha)$ |             |
|       |   |             | <b>X</b> −∞ |

$$(C_f)$$
 مستقيم مقارب ل $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$  (أ - 3  $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})) = 0$  معناء  $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}) = 0$   $+\infty$  معنقيم مقارب ل $(C_f)$  عند  $(C_f)$  مستقيم مقارب ل $(C_f)$  مستقيم مقارب ل $(C_f)$  مند  $(C_f)$  مند  $(C_f)$  تكافئ  $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$  ومنه  $(C_f)$  ومنه  $(C_f)$  في النقطة  $(C_f)$  حيث  $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e})) = \frac{1 - 3\sqrt{e}}{2}$ 

## الهندستالفضائيت

### الجداء السلمي في الفضاء:

 $(\vec{v} \neq \vec{0})$  و  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$ 

 $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من الفضاء ، توجد ثلاث نقاط من الفضاء  $\vec{AC}=\overrightarrow{v}$  ميث :  $\vec{AB}=\overrightarrow{u}$  أي  $\vec{AC}=\overrightarrow{v}$  أي

يوجد مستو(P)يشمل النقط A;B;C ومنه الجداء السلمي

للشعاعين II و I في الفضاء هو نفسه الجداء

السلمي للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في المستوى (P) ولدينا الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  هوا لعدد الحقيقي:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} = \left\| \overrightarrow{u} \right\|^{2} \xrightarrow{\rightarrow} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\| u \right\| \left\| v \right\| \cdot \cos \left( \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right)$$

 $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}: \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$  او  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$  فإن:  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$  او اذا کان:

$$\overrightarrow{v} \stackrel{\rightarrow}{=} \stackrel{\rightarrow}{0} \stackrel{\rightarrow}{u} \stackrel{\rightarrow}{=} \stackrel{\rightarrow}{0} \stackrel{\rightarrow}{:} \stackrel{\rightarrow}{u.v} \stackrel{\rightarrow}{=} \stackrel{\rightarrow}{0} \stackrel{\rightarrow}{=} \stackrel{\rightarrow}{u.v} \stackrel{\rightarrow}{=} \stackrel{\rightarrow}{0}$$

نان:  $\vec{v} = \vec{v}$  متعامدان.  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{0}$  فإن

خواص : ليكن  $ec{u}$  و  $ec{v}$  أشعة و k عدد حقيقي .

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$$

$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \square$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \left( \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \square$$

$$\begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ u - v \end{pmatrix}^2 = \stackrel{\rightarrow^2}{u} + \stackrel{\rightarrow^2}{v} - 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \stackrel{\rightarrow}{u}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{v} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{pmatrix} \square$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}^2 \square$$

### العبارة التحليلية للجداء السلمي:

 $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$  الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $\vec{v}(x',y',z')$  و  $\vec{u}(x,y,z)$ 

 $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$ 

### طويلة شعاع:

 $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$  الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

 $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  : فإن  $\vec{u}(x, y, z)$ 

المسافة بين نقطتين:

نإن: B(x', y', z') فإن A(x, y, z)

 $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ 

معادلة سطح كرة:

لتكن (C) كرة مركزها  $\omega(x_0,y_0,z_0)$  و نصف قطرها

(C<sub>r</sub>)•

.(r>0) حيث r

ر المحيث (۱ محيث ال

ومن أجل كل نقطة

(C) من M(x,y,z)

 $\omega M = r$ : فإن

 $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$ 

أي معادلة (C) هي :

 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$ 

عيث: M(x, y, z) للنقط (C) حيث:

 $x^{2} + y^{2} + z^{2} + a.x + b.y + c.z + d = 0$ 

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^{2} + \left(y - \frac{2}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{6}{2}\right)^{2} = 0$$

$$-(2)^{2} - (1)^{2} - (3)^{2} + 1 = 0$$

$$(x + 2)^{2} + (y - 1)^{2} + (z + 3)^{2} = 13 = 0$$
ومنه : 31 عبارة عن جميع نقاط سطح كرة مركزها  $r = \sqrt{13}$  ونصف قطرها  $r = \sqrt{13}$ 

■ المستقيات و المستويات في الفضاء:

✓ المستقيم في الفضاء:

1) التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطتين:

A(2,-2,3) مستقيم يشمل النقطتين ( $\Delta$ ) عثال : B(-1,2,-1)

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (۵)  $\overrightarrow{AM} = \lambda$ .  $\overrightarrow{AB}$ : فإن  $(\Delta)$  فإن M(x,y,z) فإن كن النقطة

 $(\lambda \in R)$  حيث AB(-3;4;-4)  $\overrightarrow{AM}(x-2;y+2;z-3)$  حيث:

$$\begin{cases} x = -3.\lambda + 2 \\ y = 4.\lambda - 2 \end{cases} : \begin{cases} x - 2 = -3.\lambda \\ y + 2 = 4.\lambda \end{cases}$$

$$z = -4.\lambda + 3$$

$$\begin{cases} x - 2 = -3.\lambda \\ z - 3 = -4.\lambda \end{cases}$$

2) التمثيل الوسيطى لمستقيم يشمل نقطة ويوازي شعاع غير معدوم:

مثال:  $(\Delta)$  مستقيم يشمل النقطة A(5,-2,1) ويوازي  $\overrightarrow{u}(1,3,4)$  الشعاع

 $(\Delta)$  المدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم

 $\overrightarrow{u}$  الذي يشمل النقطة A ويوازي الشعاع

 $\overrightarrow{AM} = \lambda . \overrightarrow{u} :$ لتكن النقطة M(x, y, z) من M(x, y, z) فإن : (λ∈ R) حيث

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{e}{2}\right)^{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{2}$$

$$- \left(\frac{b}{2}\right)^{2} - \left(\frac{e}{2}\right)^{2} + d = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{e}{2}\right)^{2} = a,$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^{2} + \left(\frac{c}{2}\right)^{2} - d$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{e}{2}\right)^{2} = a,$$

$$= \frac{a^{2} + b^{2} + c^{2} - 4d}{4}$$

$$: 0 \text{ is } a^{2} + b^{2} + c^{2} - 4d > 0 : 0 \text{ is }$$

$$e^{2} + e^{2} + e^$$

اذا كان:  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$  فإن  $a^2 + b^2 + c^2 + d < 0$  مي

# White with the

ما طبيعة مجموعة النقط M(x, y, z) التي تحقق المعادلة:  $x^{2} + y^{2} + z^{2} + 4.x - 2.y + 6.z + 1 = 0$ 

## m/colo

 $x^2 + y^2 + z^2 + 4.x - 2.y + 6.z + 1 = 0$ 

$$\begin{cases} x = \lambda + 5 \\ y = 3.\lambda - 2 : \text{if} \end{cases} \begin{cases} x - 5 = \lambda \\ y + 2 = 3.\lambda : \text{if} \end{cases}$$

$$z = 4.\lambda + 1$$

$$z = 4.\lambda$$

ملاحظة: كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له. √ المستوى في الفضاء:

1) التمثيل الوسيطي لمستويشمل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة:

B(2,1,1) و A(0,1,-1) مستو يشمل النقط (P) : مثال C(5,0,3)

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل ثلاث نقط A, B, C ليست على إستقامية.

نتحقق أن النقط A, B, C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة.

 $\overrightarrow{AB} = \lambda . \overrightarrow{AC}$ : نثبت أنه لا يوجد عدد حقيقي  $\lambda$  حيث لدينا: (2;0;2) AB و (AC (5;-1;4)

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{5} \\ \lambda = 0 : \lambda \end{cases} \begin{cases} 2 = 5.\lambda \\ 0 = -\lambda : \lambda \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

مستحيل، ومنه النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

ومنه 
$$(P)$$
 أساس للمستوي  $(P)$  أساس للمستوي  $(P)$  .  $(P)$  أساس للمستوي  $(P)$  فإن :

 $(\beta \in R)$   $\alpha \in R$  (حیث)  $AM = \alpha$ ,  $AB + \beta$ , AC

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 5\beta \\ y = -\beta + 1 \end{cases} : \alpha = 2\alpha + 5\beta$$

$$z = 2\alpha + 4\beta - 1$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 5\beta \\ y - 1 = 0.\alpha - \beta \end{cases}$$

$$z + 1 = 2\alpha + 4\beta$$

2) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل نقطة وشعاعان يشكلان أساسا له:

 $\binom{3}{n: r}$  و A(2,1,-3) مستو يشمل النقط A(2,1,-3) و  $\binom{P}{n: r}$  $\overrightarrow{v}$  (-1;2;3)  $\overrightarrow{u}$  (1;0;2): أساسا له حيث :

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل النقطة

u; v u

 $AM = \alpha, u + \beta, v$ نانقطة M(x, y, z) من M(x, y, z) التكن النقطة  $(\beta \in R \cdot \alpha \in R : -\infty)$ 

 $\int x - 2 = \alpha - \beta$  $x = \alpha - \beta + 2$  $y = 2.\beta + 1$  : ومنه  $y - 1 = 0.\alpha + 2.\beta$  $|z=2\alpha+3\beta-3|$   $|z+3=2\alpha+3\beta$ 

3) المعادلة الديكارتية لمستو:

• المعادلة الديكارتية لمستو يشمل نقطة ويعامد شعاع غير asteq:

مثال : (P) مستو يشمل النقط (3,2,-10) ويعامد  $.\vec{u}(1;-5;7)$  الشعاع

الهدف من هذا المثال تعيين معادلة ديكارتية لمستو يشمل النقطة A ويعامد الشعاع  $\overrightarrow{u}$ .

AM.u=0: نان (P) من M(x,y,z) نان لتكن النقطة  $\overline{AM}(x-3; y-2; z+10)$  ولدينا: 1.(x-3)-5.(y-2)+7.(z+10)=0x-5y+7z+77=0:

• المعادلة الديكارتية لمستو يشمل ثلاث نقط لبست على إستقامية:

.C(0;1;2)، B(2;-4;0)، A(1;1;3) يشمل النقط (P): مثال نتحقق أن النقط C ، B ، A استقامة واحدة:

مي (1;-5;-3) م AC(-1;0;-1) ولدينا: معناه AB و AC غیر مرتبطان خطیا و منه ABر- C ، B ، A ليست على استقامة واحدة ومنه النقط (ABC) ار (P) او (ABC)تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P): (نبحث عن شعاعا ناظميا للمستوي(P) نفرض أن الشعاع (a;b;c) شعاع  $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=0$  و  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=0$  ناظمي للمستوي (P)فإن  $\begin{cases} a - 5b - 3c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases}$  $b=rac{4}{5}$  نفرض: a=1 ومنه فإن a=1ون يكون الشعاع  $(1;-1;\frac{4}{5})$  شعاعا ناظميا  $\vec{n} = 5.\vec{n}$  : للمستوى (P) ونلاحظ أيضاً أن الشعاع شعاعا ناظمیا للمستوی (P) لأن  $\overrightarrow{n}$  و  $\overrightarrow{n}$  مرتبطان خطیا.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$  نان: (P) نان: M(x; y; z) نکن  $\vec{n}'(5;-5;4)$  و  $\vec{AM}(x-1;y-1;z-3)$ (x-1)(5)+(y-1)(-5)+(z-3)(4)=0أي: 0 = 21 - 2y + 4z - 12 = 0 معادلة (P) الديكارتية.

الشعاع العمودي لمستو يسمى شعاع ناظمي له .

• كل مستو له معادلة ديكارتية من الشكل

u(a;b;c) و a.x + b.y + c.z + d = 0

z=0 : المستوي  $(o;ec{i}:ec{j})$  معادلته من الشكل

x=0 : معادلته من الشكل ( $v; \vec{j}; \vec{k}$ ) المستوي

y=0 : المسنوي  $\left(o; ec{i}; ec{k}
ight)$  معادلته من الشكل

<sup>4)</sup> الانتقال من المعادلة الديكارتية لمستو إلى التمثيل الوسيطي له والعكس:

 $y = -\alpha + 3\beta + 2$  مستو تمثيله الوسيطي له: مثال (P) مستو تمثيله الوسيطي (P) مستو تمثيله الوسيطي و (P)

 (P) مستو معادلته الديكارتية من الشكل: a.x + b.y + c.z + d = 0نفرض ثلاث نقط C ، B ، A من (P) ليست على استقامة واحدة فيكون (P) اساس للمستوي (P). : نان (P) من M(x, y, z) نان ناند

 $(\beta \in R)$   $\alpha \in R$ : حیث  $AM = \alpha$ .  $AB + \beta$ . ACx+y-z+1=0: مثال مستو معادلته الديكارتية الهدف هو إعطاء تمثيلا وسيطيا للمستوي (P). لدينا: النقط C ، B ، A من (P) حيث: C(-1;0;0), B(0;-1;0), A(0;0;1)

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

لدينا: (0;-1;-1) م (0;-1;-1) لدينا ومنه النقط A,B,C ليست على استقامة  $\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ واحدة.

. (P) إساس للمستوي  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ لتكن النقطة (P) من M(x, y, z) فإن:

 $(\beta \in R, \alpha \in R: \prec) \overrightarrow{AM} = \alpha. \overrightarrow{AB} + \beta. \overrightarrow{AC}$  $x = 0.\alpha - 1.\beta$  $y = -1.\alpha + 0.\beta$  :  $z-1=-1.\alpha-1.\beta$ 

$$\begin{cases} x = -\beta \\ y = -\alpha \\ z = -\alpha - \beta + 1 \end{cases}$$

الانتقال من التمثيل الوسيطي لمستو إلى المعادلة الديكارتية له:

 $\int x = 2\alpha + \beta - 1$ 

 $z = \alpha - \beta$ 

 $\beta \in R$  و  $\alpha \in R$  حيث  $\alpha \in R$ 

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t \\ z = -2t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda + 1 = -t + 2 \\ -\lambda = 3t \end{cases}$$
 : نحصل على :  $2\lambda + 3 = -2t + 1$ 

$$\begin{cases} \lambda + t - 1 = 0....(1) \\ 3t + \lambda = 0.....(2) \\ 2\lambda + 2t + 2 = 0....(3) \end{cases}$$

$$t = \frac{-1}{2}$$
: من (2):  $\lambda = -3t$  نعوض في (1) و (3) نجد  $\lambda = -3t$ 

مستحيل ومنه  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا من نفس المستوي .

## 2) الوضع النسبي لمستويين:

في الفضاء يكون المستويان (P) و (P') إما : متوازيان (4) متطابقان أو متطابقان (4) متقاطعان في مستقيم (4)

$$x - y + z - 1 = 0$$
: مثال: (P) مستو معادلته

$$2x-2y+2z-5=0$$
 : مستو معادلته (P') مستو

$$(P)$$
 لدينا :  $(1;-1;1)$  شعاع ناظمي لـ

$$(P')$$
 و  $\overrightarrow{n}'(2;-2;2)$  شعاع ناظمي ل

 $\overrightarrow{n'} = 2.\overrightarrow{n}$ :  $\overrightarrow{n'} = 2.\overrightarrow{n}$ :  $\overrightarrow{n'} = 2.\overrightarrow{n'}$ 

ومنه : (P') و (P') متوازیان .

x - y + z - 1 = 0: مثال: (P) مستو معادلته

$$2x-3y+z-5=0$$
: مستو معادلته (P')

 $\vec{n}'(2;-3;1)$  و (P) لدينا :  $\vec{n}(1;-1;1)$  شعاع ناظمي له

(P') لنعاع ناظمي ل

v(1;3;-1) و u(2;-1;1) اساسا له v(1;3;-1) و u(2;-1;1) اساسا له A(-1,2,0) و را

 $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}=0$ : ناظم لا (P) فإن  $\overrightarrow{n}(a;b;c)$  نيكن  $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}=0$  شعاع ناظم لا (P)

$$c=1:$$
 نفرض  $\begin{cases} 2a-b+c=0 \\ a+3b-c=0 \end{cases}$  نفرض

$$b = 2a + 1 : (1)$$
 من  $\begin{cases} 2a - b + 1 = 0....(1) \\ a + 3b - 1 = 0....(2) \end{cases}$  فيان  $\begin{cases} 2a - b + 1 = 0....(1) \\ a + 3b - 1 = 0....(2) \end{cases}$ 

a+3(2a+1)-1=0: نعوض في (2) نحصل على

 $b = -\frac{3}{7}$  ,  $a = -\frac{2}{7}$  :

فيكون لدينا شعاعا ناظها للمستوي (P) الذي يشمل النقطة (1,2,0 –)A

وهكذا نكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P).

✓ الأوضاع النسبية لمستقيمات ومستويات في الفضاء:

#### 1) الوضع النسبي لمستقيمين:

في الفضاء يكون المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  إما :

متوازیان (غیر متطابقان أو متطابقان ) ـ متقاطعان ـ لیسا من نفس المستوی

مثال :  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  مستقيمان تمثيلهما الوسيطي :

 $\overrightarrow{v}(-1;3;-2)$  و  $(\Delta)$  شعاع توجيه  $(\Delta')$  و (1;-1;2) لدينا  $(\Delta')$ 

 $\frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{3}$  و لدينا :  $\overrightarrow{v}$  غير مرتبطان خطيا لأن :  $\overrightarrow{u}$  و لدينا :  $(\Delta')$  غير متوازيان .

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \end{cases}$$
 نعوض قیم  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $z = 2\lambda + 3$ 

#### الهندستالفضائية

ملاحظات:

(P) تنتمیان لمستو 
$$(\Delta)$$
 تنتمیان لمستو فإن  $(\Delta) \subset (P)$ .

نفرض 
$$\overset{\longrightarrow}{u}$$
 شعاعا ناظمیا للمستوي  $P$  و  $\overset{\longrightarrow}{u}$  شعاع توجیه للمستقیم  $P$ :

$$(P)$$
 يوازي  $(\Delta)$  متعامدان فإن  $(\Delta)$  يوازي  $(P)$  يوازي إذا كان

$$(P)$$
 متوازیان فإن ( $\Delta$ ) یعامد  $\stackrel{
ightarrow}{U}$  بعامد  $\stackrel{
ightarrow}{n}$ 

المسافة بين نقطة ومستوي :

: نان 
$$A(x_A, y_A, z_A)$$
 نان  $a.x + b.y + c.z + d = 0$ 

$$d((P),A) = \frac{|a.x_A + b.y_B + c.z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

 $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$ : أو  $\vec{n}$  غير مرتبطان خطيا لأن  $\vec{n}$  أن  $\vec{n}$  أن  $\vec{n}$  أن يحظ أن المحظ أن ا  $\cdot$  ( $\Delta$ ) و (P') متقاطعان في مستقيم (P') و (P) متقاطعان في مستقيم  $z = \lambda$ : نضع  $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ نضع  $x = y - \lambda + 1$ : (1) ومنه:  $x = -2\lambda + 3$ : نبون ني (2) نبجد  $y = -\lambda + 2$  ومنه  $x = -2\lambda + 3$  $(\Delta): \left\{ y = -\lambda + 2 \right\}$  ومنه النمثيل الوسيطي ل  $\lambda \in R$  حيث

3) الوضع النسبي لمستقيم و مستوي :

فالفضاء يكون المستوي (P) والمستقيم  $(\Delta)$ 

اما: متوازیان ـ  $(\Delta)$  محتوی فی (P) ـ (P) و  $(\Delta)$  متقاطعان في نقطة .

# تمارين

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

ا  $(D)^{(1)}$  و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$$t \in IR \quad \text{if } \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + 4k \end{cases} = \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases}$$

بین ان (D) و (T) متوازیان.

 $(T)_{e}(D)^{(2)}$  مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$$1 \in IR \quad \text{i.e.} \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 + 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$
$$k \in IR \quad J$$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$$t \in IR$$
 عيث  $\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \end{cases}$  و  $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$   $z = -1 + 4k$   $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$   $z = 1 + t$   $k \in IR$  بين أن  $(D)$  و  $(D)$  متقاطعان.

#### حل التمرين 01:

(D) شعاع توجيه المستقيم (
$$\vec{u}$$
) (1

$$(T)$$
 شعاع توجیه المستقیم  $\vec{v}\left(\frac{4^2}{4}\right)$ 

معناه (1) و(1) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$1=1+k$$
:نصع:  $2-t=1-k$  من المعادلة 2 لدينا  $2-t=1-k$ 

ثم نعوض 1 في كل من المعادلات 1 و 3 نحصل على:

$$t = 2: 0$$

$$\begin{cases}
1 = k \\
1 = k
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-3 + 2(1 + k) = k \\
1 + 1 + k = -1 + 4k
\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2(2) = 1 \text{ is solution} \end{cases}$$
 أو من أجل  $z = 1$  نحصل على:  $z = 1 + 2 = 0$   $z = 1 + 2 = 3$ 

A(1;0;3) نستنتج أن: (D) و (T) يتقاطعان في النقطة

#### التمرين 02:

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

(D): 
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \ \text{if } (P) : -2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$
 (1) 
$$z = 2 + t$$

(D): 
$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2-2t \\ z = 2 \end{cases}$$
 (P):  $x + 3y - z + 1 = 0$  (2)

(D): 
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$
 (P):  $x + y - 2z + 2 = 0$  (3)

$$|L_{ij}| = \frac{1}{1 - \frac{1}{1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{1}} - \frac{1}{1} = \frac{1$$

(T) 
$$\frac{1}{2}$$
 (D)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (2)

$$\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 + i \\ y = i \end{cases}$$

$$z = 5 + 3k \qquad \begin{cases} x = -3 + i \\ z = 1 + M \end{cases}$$

نبحث عن نقطة تقاطع المستقيهان إن وجاءت:

$$\begin{cases}
-3+t=-1+k \\
t=2-2k \\
1+3t=5+3k
\end{cases}$$

نعوض 1 من المعادلة 2 في كل من المعادلات 1 و 3

نحصل عل:

$$\begin{cases} 0 = 3k \\ 2 = 9k \end{cases} \begin{cases} -3 + 2 - 2k = -1 + k \\ 1 + 3(2 - 2k) = 5 + 3k \end{cases}$$

$$0 = k$$
ومنه  $\begin{cases} 0 = k \\ 2 \\ = k \end{cases}$ 

نستنتج أن: (D) و (T) لا يتقاطعان ومنه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

لدينا:  $\frac{2}{1} \times \frac{2}{1}$  إذن:  $\vec{n}$  و  $\vec{v}$  ليسا متوازيان.

ومنه: ( D ) و ( T ) ليسا متوازيان.

#### التمريز 03.

نعتبر المستقيمات الثلاثة (D3); (D2); حيث:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
 (D3)

$$\begin{cases} x = 5 - 4t' \\ y = -2t' \quad ; t' \in R \end{cases}$$
 (D2)  
$$z = -1 + 2t'$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} ; t \in R \quad (D1)$$
$$z = 1 - t$$

 $(D_3)$  أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم أ

. بين أن المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  متطابقان (2

ك بين أن المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_3)$  ليس من نفس المستوى.

4) (Δ) مستقيم يمر من النقطة 4, 1-, 5) A) و شعاع

 $(\Delta)$  و  $(D_1)$  توجیهه  $(D_1)$  . بین أن المستقیمین  $(D_1)$  و  $(\Delta)$  یتقاطعان فی نقطة واحدة بطلب تعیین إحداثیاتها.

#### حل التمرين 03 :

:  $(D_3)$  كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (1

نكتب x و y بدلالة z ( z وسيط ) .

$$\begin{cases} x - y = 2z \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
 و منه : 
$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
 : لدينا

$$\begin{cases} 3x - 3y = 6z \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
: e also s

 $x = \frac{6}{5}z$  و منه : 5x = 6z و منه : 5x = 6z

و بالتعويض في المعادلة x - y = 2z نجد:

$$y = x - 2z = \frac{6}{5}z - 2z = -\frac{4}{5}z$$

# حل التعرين 02:

نعوض ٢، ٧، ت في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط 1 ثم نبحث عن إحداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت.

أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي t فإن المستقيم (D) عتوى في المستوي (P) :

$$\begin{cases}
-2x + y - z + 3 = 0 \\
x = t
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
y = -1 + 3t \\
z = 2 + t
\end{cases}$$

-2(t)+(-1+3t)-(2+t)+3=0-2t-1+3t-2-t+3=0

أي: 0=0 دائما محققة

نستنج أن: (D) محتوى في المستوي (P)

$$(D)\cap(P)=(D)$$
 ومنه

$$\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 & (2) \\ x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

1+3t+3(-2-2t)-2+1=0:

$$1+3t-6-6t-1=0$$

$$-3t = 6$$

$$t = -2$$

(D): 
$$\begin{cases} x = 1+3(-2) = -5 \\ y = -2-2(-2) = 2 \end{cases}$$
 where  $z = 2$ 

$$(D) \cap (P) = \{ A(-5;2;2) \} : i$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ x = 5 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$
 (3)

$$z=4+t$$

5+t+1+t-2(4+t)+2=0

أي: 6 = 0 + 2t - 8 - 2t + 8 = 0 أي: 6 = 0 مستحيل

 $(D)\cap (P)=\emptyset$  : ومنه نستنتج آن

 $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$  : هو  $(D_3)$  هو إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم

$$(D_3): \begin{cases} x = \frac{6}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

 $(D_1)$  إثبات أن المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_1)$  متطابقان  $n_1(2,1,-1)$  هو  $(D_1)$  هو لدينا شعاع توجيه المستقيم  $(D_1)$  هو  $(D_2)$  هو  $(D_1)$  مناع توجيه المستقيم  $(D_1)$  هو  $(D_1)$  ه أن المستقيمين  $(D_1)$  نلاحظ أن  $(D_1)$  متوازيان.

من جهة أخرى النقطة 1 , 2 , 1  $(A (D_1, -2) D_1)$  تتمي إلى  $(D_1)$  من أجل  $(D_1, -2) D_2$  و تتمي إلى  $(D_1, -2) D_2$  و إلا إلى المستقيمين  $(D_1) D_2$  و  $(D_1) D_2$  متوازيان و لهما نقطة مشتركة و بالتالي فإن المستقيمين  $(D_1) D_2$  و  $(D_1) D_2$  متطابقان.  $(D_1, -2) D_3$  و  $(D_1, -2) D_4$  متطابقان.  $(D_1, -2) D_4$  المستقيم  $(D_1, -2) D_4$  المستوي  $(D_1, -2) D_4$  و أن المستقيم  $(D_1, -2) D_3$  هو  $(D_1, -2) D_4$  و أن المستقيمين  $(D_2, -2) D_3$  و عليه فإن المستقيمين  $(D_3) D_3$  و عليه فإن المستقيمين  $(D_3) D_3$  و عليه فإن المستقيمين  $(D_3) D_3$  و عليه أن المستقيمين أن أنهما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوى .

 $:(D_3)$  و  $(D_1)$  دراسة تقاطع المستقيمين

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda - 2t = 1....(1) \\ -\frac{4}{5}\lambda - t = -2....(2) : \\ \lambda + t = 1....(3) \end{cases} \begin{cases} \frac{6}{5}\lambda = 1 + 2t \\ -\frac{4}{5}\lambda = -2 + t; t \in \mathbb{R} \\ \lambda = 1 - t \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}\lambda = -1$$
: من (2) و (3) نجد :  $1 - 2 + \lambda + \lambda = -1$  ومنه:  $1 - 2 + \lambda = -1$  و علیه فإن :  $2 - 3 + \lambda = -1$  .

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:  $\frac{6}{5}(-5) - 2 \times 6 = -6 - 12 = -18 \times 1$  ان الجملة ليست فيا حل و بالثاني فإن المستقيمين (0)

و (D) غير متقاطعان يغني أنهما ليس من نفس المستوبي 4) إثبات أن المستقيمين (D) و (A) بتقاطعان في نقطة واحدة بطلب تعيينها :

النمثيل الوسيطى للمستقيم (۵):

بما أن للمستقيم ( $\Delta$ ) يعر من النقطقة . 1 - , 5 ( $\Delta$ ) بما أن للمستقيم ( $\Delta$ ) يعر من النقطقة . M(x,y,z) و شعاع توجيهه ( $\Delta$ )  $\Delta$ 0 و شعاع توجيهه ( $\Delta$ 1.1) و لتكن

 $\overline{AM} = \alpha. \overrightarrow{u}$  نقطة من  $\Delta$  معناء  $\overline{AM}(x-5; y+1; z-4)$  لدينا

$$\begin{cases} x-5=3\alpha \\ y+1=\alpha \ ; \alpha \in R : 0 \\ z-4=\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = \alpha - 1 : \alpha \in R : \emptyset \\ z = \alpha + 4 \end{cases}$$

 $\vec{n}_1$ إثبات أن المستقيمين  $(D_1)$  و  $(\Delta)$  يتقاطعان :  $\vec{n}_1$ (2,1,-1) هـ و  $(D_1)$  هـ و  $\vec{n}_1$ (2,1,-1) و شعاع توجيه المستقيم  $(\Delta)$  هـ و (3,1,1) .  $\vec{n}_1$  (3,1,1) هـ و (3,1,1) . (3,1,1) . (3,1,1) . (3,1,1) . (3,1,1) .

 $(\Delta)_{1}(D_{1})$  نلاحظ أن  $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$  و عليه فإن المستقيمين في وعليه فإن المستقيمين غير متوازيانو بالتالي هما إما متقاطعان أو ليس من نفس

 $(\Delta)$  و  $(D_1)$  دراسة تقاطع المستقيمين

$$\begin{cases} 5+3\alpha = 1+2t \\ -1+\alpha = -2+t; t \in R \\ 4+\alpha = 1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 2t = -4....(1) \end{cases}$$

 $\alpha + t = -3....(3)$ 

$$\begin{cases} \alpha - t = -1 \dots (2) \end{cases}$$

 $AC = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$  $S = \frac{1}{2} \vec{AB} \vec{AC} = \frac{\sqrt{21.\sqrt{6}}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2} (6.5)$  (2) : ABC عميين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث (4

((A,1); (B,1); (C,1) غرجت الجملة ((A,1)

$$D\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{0+2+1}{3}, \frac{-1+3-2}{3}\right)$$
:وعايه فإن $D(2,1,0)$ 

D(1;1;-2), C(0;-2;3), B(-1;2;4), A(2;1;-1)x - 2y + z + 1 = 0: الذي معادلته (P) الذي أجب بصح أوخطأ معاللا إجابتك على كل سؤال من الأسئلة

- النقط C; B; A تعين مستويا وحيدا.
- (P) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P).
- 3) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABD) هي: x + 8y - z - 11 = 0

$$(k \in R)$$
 هو: (AC) هو: (4  $(x = 2k)$ 

$$\begin{cases} y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$$

 $\frac{\sqrt{6}}{3}$  سطح الكرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (P) هماسه للمستوي

#### حل التمرين 05:

 $\overrightarrow{AC}$  (-2;-3;4) ،  $\overrightarrow{AB}$  (-3;1;5) الدينا (1

و منه  $\overrightarrow{AC}$  ومنه  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AB}$  غير مرتبطان خطيا .

 $\alpha = -2$  :  $\alpha = -4$  :  $\alpha = -2$  (3)  $\alpha = -4$ وعليه فإن: 3 = -1 + 2 - و منه: ١ = -1 . بالتعويض في المعادلة (1) نجد: ١- = - 6 + 2 الي ان  $\alpha = -1$  و  $\alpha = -2$  و ا و بالتالي فإن المستقيمين  $(D_{_{1}})$  و  $(\Delta)$  يتقاطعان في نقطة واحدة هي :

$$\alpha = -2:$$

$$\begin{cases} x = 3(-2) + 5 = -1 \\ y = -2 - 1 = -3 \\ z = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

$$(D_1) \cap (\Delta) = \{(-1, -3, 2)\}:$$

$$\downarrow : \exists x = 3(-2) + 5 = -1$$

نعتر النقط (1,0,-1) ، B(2,2,3) ، A(1,0,-1) نعتر النقط

- 1) تحقق أن النقط A ، B ، A ليست على استقامة واحدة .
  - 2) أثبت أن المثلث ABC قائم.
  - 3) أحسب مساحة المثلث ABC (3
  - . ABC عين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث (4)

#### حل التمرين 04 :

(1 التحقق أن النقط A ، A ليست على استقامة واحدة C

$$\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$$
 ,  $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ 

 $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$  نلاحظ أن خطيا لأن:  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطان خطيا لأن:

ومنه النقط C ، B ، A ليست على استقامة واحدة .

2) أثبات أن المثلث ABC قائم:

 $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$  و  $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ 

 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 4 \times (-1) = 0$ 

ومنه المثلث ABC قائم في A .

 $ABC: S = \frac{1}{2}. \overrightarrow{AB}. \overrightarrow{AC}$  عساحة المثلث (3

81 
$$AB = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21}$$

 $d((P);D) = \frac{1 - 2(1) + (-2) + 1}{1^2 + (-2)^2 + (1)^2}$ (5) =  $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 

أي: d((P); D) يساوي نصف قطر الكرة وعليه الإجابة (صحيحة) .

#### التمرين 06:

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس  $(o;\vec{i}\;;\vec{j}\;;\vec{k}\;)$  . D(0;0;1), C(1;4;0), B(2;0;-1),  $A(\lambda;2;3)$  نعتبر النقط  $\lambda$  الجداءات السلمية التالية :

.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$  ،  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  ،  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  . (2) عين قيمة العدد الحقيقي  $\lambda$  كي يكون المثلث C . C . C .

افي ما يأتي نأخذ 4 = −4.

أ) بين أن النقط D, C, B, A لا تنتمي إلى نفس المستوي .

ب) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة:

 $\{(C;-2);(B;1);(A;2)\}$ 

ج) عين المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء والتي  $\overrightarrow{S}$  عين المجموعة (E) معقق مايلي :  $\overrightarrow{S}$   $\overrightarrow{S}$ 

#### حل التمرين 06:

 $\overrightarrow{AB}(2-\lambda;-2;-4), \overrightarrow{AC}(1-\lambda;2;-3), \overrightarrow{BC}(-1;4;1)$  (1  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda$  ومنه  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda$ 

D(0;0;1), C(1;4;0), B(2;0;-1), A(4;2;3)  $\land$  (3  $\overrightarrow{AD}(4;-2;-2)$ ,  $\overrightarrow{AC}(5;2;-3)$ ,  $\overrightarrow{AB}(6;-2;-4)$  ومنه النقط C; B; A ليست على استقامة واحدة وعليه النقط C; B; A تشكل مستو وحيد وعليه فإن الإجابة (صحيحة).

(2) نعوض إحداثيات A و C في معادلة (P) نجد:

 $A \in (P)$  ومنه 2-2(1)+(-1)+1=00=0

0-2(-2)+3+1=0

 $C \notin (P)$  ومنه  $8 \neq 0$ 

بها أن  $A\in (P)$  و  $C
ot\in (P)$  فاين المستقيم

محتوى في (P) وعليه فإن الإجابة ( خاطئة ).

3) نتحقق أن النقط (ABD) تشكل مستو وحيد:

 $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$  لدينا:  $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ 

و منه النقط D; B; A تعین مستو وحید.  $\frac{-3}{-1} \neq \frac{5}{-1}$ 

: نعوض إحداثيات D;B;A في المعادلة الديكارتية

x + 8y - z - 11 = 0

نجد0 = 0 - (-1) - (-1) نجد0 = 0 وعليه إحداثيات

A تحقق المعادلة:

. 0 = 0 أي 1 + 8(2) - 4 - 11 = 0

وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة

.0 = 0 أي 1 + 8(1) - (-2) - 11 = 0

وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة

وعليه فإن الإجابة (صحيحة)

4) نعوض إحداثيات A في التمثيل الوسيطي نجد:

 $\begin{cases} 2 = 2k & ; \quad k = 1 \end{cases}$ 

 $\begin{cases} 1 = 2 + 3k \; ; \; k = -\frac{1}{3} \end{cases}$ 

-1=3-4k; k=1

ومنه إحداثيات A لاتحقق التمثيل الوسيطي وعليه فإن الإجابة (خاطئة).

D, C, B, A تكون النقاط D, C, B, A من نفس المستوي إذا كانت  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  الأشعة  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  من نفس المستوي أي إذا وجد عددين حقيقيين .

علدين حقيقين .
$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} : \alpha, \beta$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 5\beta = 4 \quad (1) \\ -2\alpha + 2\beta = -2 \quad (2) \quad * \quad ... \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\alpha - 3\beta = -2 \quad (3) \end{cases}$$

 $lpha=rac{5}{2}$  الجملة الكونة من المعادلتين (2) و(3) تقبل كحل  $eta=rac{5}{2}$  وهما لا يحققان (1) إذن الجملة \*  $eta=rac{2}{7}$  إندن الجملة \* ليست لها حل وبالتالي لا يوجد eta, eta يحققان العلاقة A, A A; B; C; D ومنه النقاط A, A; B; C; D ومنه النقاط A, A; B; C; D تتمي إلى نفس المستوي.

$$x_G = \frac{2x_A + x_B - 2x_C}{2 + 1 - 2} = -8$$
 : برا نعلم آن:  $y_G = \frac{2y_A + y_B - 2y_C}{2 + 1 - 2} = -4$  , 
$$z_G = \frac{2z_A + z_B - 2z_C}{2 + 1 - 2} = 5$$

ومنه إحداثيات النقطة (-8;-4;5)

 $\{(C;-2);(B;1);(A;2)\}$  جرابيا أن النقطة G مرجح الجملة G جرابيا أن النقطة G مرجح الجملة G فإنها تحقق العلاقة : G عربي أن النقطة G عر

$$\left(2\left(\overrightarrow{MG}+GA\right)+\left(\overrightarrow{MG}+GB\right)-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$$

$$\left(2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{GC}\right)\overrightarrow{MD} = 0$$

 $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$  (iii)

أي مجموعة النقط M من الفضاء هي جميع نقاط سطح الكرة التي قطرها [GD].

(E) نعين معادلة ديكارتية للمجموعة

(E):  $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$  is take M(x; y; z) is solution M(x; y; z) is solution M(x; y; z-1). MG(x+8; y+4; z-5): by the MD(x; y; z-1). MG(x+8; y+4; z-5):

(x+8).(x)+(y+4).(y)+(z-5).(z-1)=0:

(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24
(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24

#### العربي 07

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (S)الذي مركزه (1;2;-1) ويشمل النقطة (S;0;3).

A في A الذي يمس الكرة (S) في A . (2) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة

(3) أثبت أن المستوي  $(\pi)$  الذي معادلته

x + 2y + 2z + 15 = 0

يمس السطح الكروي (S') ذو المعدلة

ي التاس.  $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$  ثم عين إحداثيات نقطة التاس.

#### حل التمرين 07:

الكرة التي مركزها  $\omega$  وتشمل النقطة A يكون نصف  $\omega A$  قطرها  $\omega A$ 

$$\omega A = \sqrt{(x_A - x_\omega)^2 + (y_A - y_\omega)^2 + (z_A - z_\omega)}$$
$$= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

R نعلم أن معادلة الكرة S التي مركزها  $\omega$  ونصف قطرها S  $(x-x_{\omega})^2+(y-y_{\omega})^2+(z-z_{\omega})^2=R^2$  هي S إذن معادلة الكرة S هي :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 21$$

.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 15 = 0$ : ومنه

(2) المستوي (P) يمس الكرة (S) في النقطة (S)

 $\overrightarrow{\omega A} \perp (P)$ 

$$\begin{cases} x = \lambda & \text{for } y = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ \lambda + 2\lambda + 2\lambda + 15 = 0 \end{cases}$$

من الجملة (\*)نستنتج  $\frac{5}{3}$  =  $\lambda$  وبتعويض  $\lambda$  في المعادلار للتمثيل الوسيطى لـ (OH) نجد :

$$H\left(-\frac{5}{3}; -\frac{10}{3}; -\frac{10}{3}\right)$$
:  $x = -\frac{5}{3}$ ,  $y = -\frac{10}{3}$ ,  $z = -\frac{10}{3}$ 

#### المريز 90

في الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر النقاط (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر النقاط (2;1;0) ، (AB) ، (AB) . (B) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (B) المعرفة بالمعادلة (B) نعتبر في الفضاء (B) الكرة (B) الكرة (B) المعرفة بالمعادلة (B) . (B) . (B) وحدد مركزها . (B) . (B) والمستوي (B) . (B) . (B) يقطع الكرة (B) في نقطتين (B) . (B) يقطع الكرة (B) في نقطتين إحداثياتها .

### حل التمرين 08:

(AB) نقطة من المستقيم (AB) AB(2;-2;1) نقطة من المستقيم (AB(2;-2;1) معناه يوجد عدد حقيقي AB(2;-2;1) معناه يوجد عدد حقيقي AB(2;-2;1) معناه يوجد عدد حقيقي AB(2;-2;1) AB(2;-2;1) AB(2;-2;1) AB(3;-2;1) وهو التمثيل الوسيطي له (AB(2;-2;1) النقاط AB(3;-2;1) ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين AB(3;-2;1) فهي تشكل مستوي (AB(3;-2;1) نقطيا وبالتالي فهي تشكل مستوي (AB(3;-2;1)

 $|\psi_{0}(x_{1})|^{2}$  و منه  $|\psi_{0}(x_{1})|^{2}$ 

 $I(O;(P)) = \frac{|0 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + 15|}{|1|^2 + 2|^2 + 2|^2}$   $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$   $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$   $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$   $\sqrt{10}$   $\sqrt{$ 

$$(OH) \cap (\pi) = \{H\}, \lambda \in \mathbb{N} \mid y = 2\lambda \\ \xi = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ \xi = 2\lambda \\ \xi = 2\lambda \\ \chi + 2y + 2z + 15 = 0$$

الشعاع  $\vec{n}$  ناظمي للمستوي  $(AB\omega)$  هو الشعاع الذي  $\vec{n}(a;b;c)$   $\bot \overrightarrow{AB}(2;-2;1)$  هو الشعاع الذي يعامد الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{B\omega}$  أي  $\overrightarrow{B\omega}$  منه  $\overrightarrow{B\omega}$  = 0 يعامد  $\overrightarrow{B\omega}$  = 0 منه  $\overrightarrow{B\omega}$  ومنه = 0 = 0 هو الشعاع الذي  $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{B\omega} = 0$  ومنه = 0

$$b = -1 \ c = -4 \ \text{if} \ a = 1 \ \text{if} \ \begin{cases} 2a - 2b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

ومنه  $(AB\omega)$  وتكون معادلة المستوي  $\vec{n}(1;-1;-4)$  ومنه  $\vec{n}(1;-1;-4)$  من الشكل  $\vec{n}(1;-1;-4)$  وبها أن المستوي من الشكل  $\vec{n}(1;0;0)$  فإن  $\vec{n}(1;0;0)$  فإن  $\vec{n}(1;0;0)$  فإن  $\vec{n}(1;0;0)$  هي:  $(AB\omega)$  ومنه المستوي  $\vec{n}(1;0;0)$  هي:  $(AB\omega)$  عي:  $(AB\omega)$  المستوي  $\vec{n}(1;0;0)$  عين معادلة المستوي  $\vec{n}(1;0;0)$  هي:  $(AB\omega)$  عين أن معادلة كرة مركز ها النقطة (abc) ونصف قطرها (abc) ونصف قطرها (abc) ونصف قطرها (abc) ونصف قطرها (abc) الكرة (abc) والمستوي (abc) الكرة أي الكرة أي الكرة أي الكرة أي اللائرة الكبيرة في الكرة أي اللائرة التي مركز ها (abc) ونصف الكرة ونصف الكرة أي اللائرة الكبيرة في الكرة أي اللائرة التي مركزها (abc)

: يعني (AB)  $\bigcap$  (S) (ج

 $\sqrt{6}$  قطرها

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 1 & (1) \\ y = -2\lambda + 2 & (2) \\ z = \lambda - 1 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$= \lambda - 1 \cdot y = -2\lambda + 2 \cdot x = 2\lambda - 1 \cdot 2x = 0$$

 $z=\lambda-1$  و  $y=-2\lambda+2$  و  $x=2\lambda-1$  و  $y=-2\lambda+2$  و أي المعادلة (4) وبعد تبسيطها نجد :

اذن 
$$\lambda_2 = \frac{1}{3}$$
 ومنه:  $\frac{5}{3} = 3$  ومنه:  $\lambda_1 = \frac{5}{3}$  ومنه:  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$  ومنه: المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في النقطتين:

$$F\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$
 ,  $E\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ 

 $\lambda$  يتم حسابهما بتعويض F:E يتم حسابهما بتعويض بالقيمتين  $\lambda$  و  $\lambda$  في التمثيل الوسيطي للمستقيم  $\lambda$ ).

#### النبرين 09.

الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس x = 2 - t y = 2 - 3t  $t \in R$  : x = 2 - 3t  $t \in R$  المستقيم x = 1 + t

ولتكن النقطة (A(3;-2;1) .

1) أو جد معادلة المستوي P العمودي على D والذي يشمل النقطة A .

D أحسب إحداثيات النقطة H المسقط العمودي لـ A على A أحسب المسافة بين A و A .

#### حل التمرين 09:

 $\vec{n}(-1;3;1)$  لدينا  $\vec{n}(-1;3;1)$  شعاع توجيه لـ  $\vec{n}(-1;3;1)$  لدينا  $\vec{n}(x,y,z)$  نقاط من  $\vec{n}(x,y,z)$  ومنه:معادلة  $\vec{n}(x,z)$ 

$$-(x-3)-3(y+2)+(z-1)=0$$
$$x+3y-z+4=0$$

P النقطة H هي تقاطع المستقيم D مع المستوي D النبحث عن قيم t التي تجعل النقطة D من المستقيم D تنتمي للمستوي D أي تحق الشرط (المعادلة) D وحلها D = D وحلها

H(1;-1;2) المسافة بين A و D هي الطول AH وحيث أن :

$$\overrightarrow{AH}(-2;1;1)$$

 $AH = \sqrt{6}$  اي  $AH^2 = (-2)^2 + 1^2 + 1^2$  اي

### التبرين 10

 $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس B(1;1;0)، A(-1;0;1): نعتبر النقاط: D(-1;1;2)، C(0;-1;-4) D(-1;1;2)، C(0;-1;-4) D(-1;1;2)، D(0;-1;-4) D(-1;1;2)، D(0;-1;-4) D(0;-

### حل التمرين 10:

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

:انیان  $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$  و لدینا:  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (2) \times (-1) + (1) \times (-2) + (-1) \times (-4)$  = 0  $0 \quad \overrightarrow{AB}(2;1;-1) : \overrightarrow{ABC} \quad \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AB}(2;1;-1) : \overrightarrow{ABC}$   $\overrightarrow{AB}(2;1;-1) : \overrightarrow{ABC} \quad \overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$   $\overrightarrow{AC}(1;-1;-5) \quad \overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$   $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$   $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$   $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = 3\sqrt{3}$   $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = 3\sqrt{3}$ 

و بها أن الشعاعين AB و BC متعامدان ومنه فإن المثلث ABC قائم في النقطة B .

 $\vec{u} \cdot \vec{BC} = 0$ و  $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ : حيث  $\vec{u} = \vec{u}$  اعداد حقيقية ثابتة ولدينا:  $\vec{u}(a;b;c)$  عيث  $\vec{u}(a;b;c)$ 

2a+b-c=0 : معناه:  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  -a-2b-4c=0 : معناه:  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 

c=1 دينا:  $\begin{cases} 2a+b-c=0 \\ -a-2b-4c=0 \end{cases}$  دينا:  $\begin{cases} 2a+b-1=0 \\ -a-2b-4=0.....(\times 2) \end{cases}$  نجد

(2) بجمع المعادلتين(1) و(2)  $\left\{ 2a+b-1=0....(1) -2a-4b-8=0....(2) \right\}$ 

b=-3 طرف لطرف نجد: 0=0-3b-9=0 ومنه  $\vec{u}(2;-3;1)$  .

(ABC) باستنتاج معادلة ديكارتية للمستوي

معادلة المستوي (ABC) تكون على الشكل:

a.x + b.y + c.z + d = 02.x - 3.y + .z + d = 0

ثم بتعويض إحداثيات النقطة A(-1;0;1) في المعادلة ثم بتعويض إحداثيات النقطة A(-1;0;1) في المعادلة 2.x-3.y+z+d=0 وعليه فإن: 1=b ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي a(ABC) هي: a(ABC)

(ABC) ج/ التحقق بأن النقطة D لاتنتمي إلى المستوي ABC واستنتج طبيعة الرباعي ABCD :

نعوض إحداثيات النقطة D(-1;1;2) في المعادلة 2.x - 3.y + .z + 1 = 0

-2=0 ومنه نجد: (2)+(2)+1=0 ومنه نجد: (2+1)+(2)+1=0 ومنه النقطة (2+1)+(2)+1=0 ومنه النقطة (2+1)+(2)+1=0

, عليه نستنتج أن الرباعي ABCD رباعي وجوه. د/ حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC):

$$d((ABC), D) = \frac{|2.x_D - 3.y_D + .z_D + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (1)^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

3) حساب حجم رباعي الوجوه : ABCD

$$V = \frac{1}{3} \left( \frac{BA \times BC}{2} \right) \times d((ABC); D)$$
$$= \frac{1}{3} \times \left( \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{21}}{2} \right) \frac{\sqrt{14}}{7} = 1$$

4) أ/ التحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي:

$$2x - 5y + 2z + 3 = 0$$

نعوض إحداثيات D;B;C في المعادلة الديكارتية :

$$2x - 5y + 2z + 3 = 0$$

$$0 = 0$$
 نجد  $2(-1) - 5(1) + 2(2) + 3 = 0$  نجد

$$2(1)-5(1)+2(0)+3=0$$
 وعليه إحداثيات  $D$  تحقق المعادلة

: 0=0 وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة

$$0 = 0$$
 أي  $2(0) - 5(-1) + 2(-4) + 3 = 0$ 

وعليه إحداثيات C تحقق المعادلة.

(BCD) عن المستوى A عن المستوى

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

$$d((BCD), A) = \frac{|2.x_A - 5.y_A + 2.z_A + 3|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$$

(BC) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

. 2x+2y+z-2=0 المستوي الذي معادلته: (P) (4

أ/ بين أن : (P) و (ABC) متقاطعان .

(P) بين أن (P) يشمل (P) ماذا تستنتج

5) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ 

#### حل التمرين 11:

: النقط النقط C ، B ، A البست على استقامة واحدة C

 $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$  لدينا:  $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ 

منه الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و منه الشعاعان خطيا  $\overrightarrow{AB}$  عير مرتبطين خطيا

ومنه النقط C . B . A ليست على استقامة واحدة.

معادلة المستوى (ABC): ليكن (a;b;c) شعاعا

 $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n}=0$  ناظها له  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}=0$  فإنه بجتن ( $\overrightarrow{ABC}$  و ( $\overrightarrow{ABC}$ 

b=2: نفرض a=1 نفرض a=1 ومنه a=1 نفرض a=1

ومنه c=1 وعليه n(1;2;1) شعاع ناظمي لـ c=1

(ABC) من M(x; y; z) من

 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$  ;  $\overrightarrow{AM} (x-2; y; z)$  : iji

(x-2)(1)+(y)(2)+z(1)=0

x + 2y + z - 2 = 0 (وعليه فإن:

3) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC):

 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC}$ : نافطة (BC) من المستقيم M(x; y; z) فإن

 $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$  مع  $\overrightarrow{BM}(x;y-1;z)$  مع  $(\lambda \in ;R)$ 

 $\left(o;ec{i}\;;ec{j};ec{k}
ight)$ الغضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط : A(2;0;0) ، و B(0;1;0) ، و C(0;0;2) ، و . بين أن النقط C;B;A ليست في استقامية  $^{(1)}$ 

 $^{(2)}$  جد معادلة للمستوي  $^{(2)}$ 

$$(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})(4;-1;-2) \cdot \overrightarrow{BA}(2;-1;0)$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}|| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$
 .  $r = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 

#### السروبر 12:

(بكلوريا علمي 2009)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(o;\vec{i}\;;\vec{j}\;;\vec{k}\;)$ . C(2;1;3) ، B(0;2;1) ، A(1;0;2) نعتبر النقط x-z+1=0 : (P) مستو معادلته من الشكل : (P) هو المستوي (ABC) . (ABC) . (ABC) . (ABC) .

أ/ تحقق أن النقطة (2;3;4) لا تنتمي إلى (ABC).
 ب/ ما طبيعة ABCD .

(ABC) و المستوي (ABC). (3) أحسب المسافة بين (ABC) . (ABCD) .

#### حل التمرين 12:

رموتبطان خطیا  $\overrightarrow{AC}$  (1;1;1) میر مرتبطان خطیا  $\overrightarrow{AC}$  (1;1;1) خطیا  $\overrightarrow{AC}$  مرتبطان خطیا خطیا  $\overrightarrow{AC}$  معناه یوجد عدد حقیقی غیر معدوم  $\overrightarrow{AC}$  حیث:

$$x = 0$$
  $x = 0$   $y = \lambda - 1$   $y = 1 - \lambda$   $y = 1 - 1 - \lambda$   $y = 2\lambda$   $z = 2\lambda$ 

$$\lambda \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

وليكن (P) المستوي المعرف بمعادلته D(1;-1;-2)

2x - y + 2z + 1 = 0: الديكارتية

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

النقط A ، B ، A في إستقامية .

2) (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

 $(\pi)$  عمودي على المستقيم (CD) عمودي على المستوي (3

. H(1;1;-1) هو النقطة B على  $(\pi)$  هو النقطة (4

#### حل التمرين 13:

C ، B ، A على إستقامية واحدة فإن :  $\lambda$  و  $\overrightarrow{AB}$  مرتبطان خطيا معناه يوجد عدد حقيقي  $\overrightarrow{AC}$  حيث :  $\overrightarrow{AC}$  =  $\lambda$  .

 $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$  و  $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$  . لدينا

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = \frac{5}{3} : \emptyset \end{cases} \begin{cases} -1 = \lambda \\ -5 = -3\lambda : 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -5$$

$$\begin{cases} -1 = \lambda \\ -5 = -\lambda \end{cases}$$

ومنه:  $\overrightarrow{AC}$  لا يوازي  $\overrightarrow{AB}$  ومنه: (الجواب خاطئ).

: احداثيات النقط A ، B ، A عقق المعادلة (2

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

من أجل النقطة 0 = 33 − (-1) − (3) − (25(2) − 6(3) من أجل النقطة

.0=0:

B: 25(1) - 6(-2) - (4) - 33 = 0

اي: 0=0.

D:25(1)-6(-1)-(-2)-33=0 من أجل النقطة 0=33=0 .

ولدينا :  $\overrightarrow{AB}$  لا يوازي  $\overrightarrow{AB}$  .

ومنه النقط A. و B و C ليست على استقامة واحدة فإنه يرجد مستو وحيد في الفضاء يشمل النقط A و B و C و يها أن

$$1-2+1=0:39 \ A \in (P)$$

$$0-1+1=0:39 \ B \in (P)$$

(P) على: المستوي (P) هو المستوي (P) هو المستوي (P) هو المستوى (ABC).

 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$  ب $AB \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$  ومنه المثلث ABC قائم في ABC

(ABC)نعوض إحداثيات D في معادلة D(2;3;4) نجد: 0=4+1=0

. (ABC) النقطة D لا تنتمي إلى D .

ABCD فإن الرباعي (ABC) الم الن (ABC) فإن الرباعي رباعي رباعي وجوء .

$$d(D;(P)) = \frac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} / 1$$
(3)

$$S = \frac{AB \times AC}{2}, h = \frac{\sqrt{2}}{2} / \varphi$$

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} (i_1 \times i_2 \times i_3)$$

# (بكلوريا علمي 2009)

 $(o; ec{i}\;; ec{j}\;; ec{k})$  أي الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

ر (3;0;-2) ، B(1;-2;4) ، A(2;3;-1) معتبر النقط (C(3;0;-2) ، B(1;-2;4)

أي النقط B ، B ، A ليست على استقامة واحدة . ونعلم أن كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة في الفضاء تشكل مستو وحيد .

ومنه (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

(الجواب صحيح) 25x - 6y - z - 33 = 0

 $\overrightarrow{n}(2;-1;2)$  و  $\overrightarrow{CD}(-2;-1;0)$  شعاعا ناظميا (3) لدينا

للمستوي (P) إذا كان المستقيم (CD) عمودي

 $\overrightarrow{n}$  على المستوي  $(\pi)$  فإن CD يوازي على المستوي

 $\overrightarrow{n}=\lambda \stackrel{\longrightarrow}{CD}$  : معناه يو جد عدد حقيقي  $\lambda$  حيث

$$\stackrel{\rightarrow}{\underset{n}{\rightarrow}} \stackrel{\rightarrow}{\underset{n}{\rightarrow}} \stackrel{\rightarrow}{\underset{n}{\rightarrow}}$$

 $\stackrel{
ightarrow}{.}(P)$  ليس شعاعا ناظميا للمستوي  $\stackrel{
ightarrow}{CD}:$ 

ومنه : (الجواب خاطئ) .

4) لدينا:

$$BH = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-2))^2 + (-1-(4))^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

$$d(B;(P)) = \frac{|-2(1) - (-2) + 2(4) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}}$$
$$= \frac{9}{\sqrt{9}} = \sqrt{9}$$

ومنه (BH ≠ d(B;(P)) ومنه : (الجواب خاطئ) .

# ( بكلوريا علمي 2010)

نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس B(2,1,1) و A(1,1,0) و C(-1,2,-1)

ا (1) بين أن النقط A و B و A أيست في استقامية . ABC بين أن المعادلة الديكار نبه للمساوي (ABC) مي : x + y - z = 2 = 0(2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على (P) اللذين معادلتيهما على (P) الترتيب : (P) (P) و (P) اللذين معادلتيهما على و (P) و (P) الذي و (P) الذي يشمل النقطة (P) (P) و (P) و (P) الذي يشمل النقطة (P) (P) و (P) و (P) أن شعاع توجيه له .

أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (D).

(D) ب تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D). 3 عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) و (P) و (Q).

#### حل التمرين 14:

ا) أ) لدينا AB(1,0,1) و AB(-2.1.-1) و بها أنه لا يوجد عدد حقيقي A بحيث AC = kAB فمعنى ذلك أن النقط C,B,A ليست إستقامية .

ب) يمكنك التأكد بكل سهولة من أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : 0 = x + y - z - 2 = 0 و ذلك بتعويض إحداثيات كل نقطة النقط C, B, A تحقق المعادلة. (2) أ) يعطى التمثيل الوسيطي للمستقيم ( $\Delta$ ) الذي يشمل النقطة ( $\pi$ (0,4,3) و شعاع له ( $\pi$ (0,4,3) كما يلي :

. مع  $\lambda$  عدد حقیقی ثابت  $x=-\lambda$  مع  $\lambda$  عدد حقیقی ثابت  $z=3\lambda+3$ 

ب) تقاطع المستويين (P) و (Q) هو مجموعة النقط

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$
 التي تحقق:  $M(x, y, z)$ 

$$\begin{cases} x + 2y = 3i - 1 \\ 2x + y = i + 1 \end{cases}$$
 بوضع  $z = i$  نحصل علی  $z = i$ 

$$e^{\pm i (n,i)}$$
 (each tild sold that  $e^{\pm i (n,i)}$   $e^{\pm i (n,i)}$   $e^{\pm i (n,i)}$ 

ب) احسب الطول ١١١٠.

ج) أحسب السافة بين النقطة " و المستوي (١١) .

ب) تحقق أن النقطة 1، تنتمي إلى السنفيم (١).

ج) أحسب مساحة المثلث ١١١٠.

#### حل التعرين 15:

(1) إحداثيات الم بتعويض الرب () و ثاب () في معادلة (1) للحصل على 3-1 و بالتالي إحداثيات الم هي (1,0,0) م) إحداثيات B تحقق معادلة (P).

$$AB = 3\sqrt{2}$$
 ( $\checkmark$ 

ج) لتكن له المسافة المطلوبة ، عندلا.

$$d = \frac{|x_e - 2y_e + z_e + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

(1) التمثيل الوسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  : بها أن  $(\Delta)$  عموه ي

على (P) فهذا يعني أن شعاع توجيه  $(\Delta)$  هو ناظمي أ(P)

و مركبات الشعاع الناظمي للمستوي هي (١,٠2.١)

وبالتالي التمثيل الوسيطي للمستفيم الذي يشمل (١٠٠٩.2)

$$|x = -\frac{1}{3}t + 1|$$

$$|x = -\frac{1}{3}t + 1|$$

$$|y = \frac{5}{3}t - 1|$$

$$|z = t|$$

$$(D)$$
نجد:  $x = -\lambda$  وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم  $x = -\lambda$   $y = 5\lambda + 4$ :  $z = 3\lambda + 3$ 

طريقة أخرى: بها أن (D) مستقيم التقاطع بين المستويين (P) و (Q) فيعني أن إحداثيات نقط (D) تحقق معادلتي المستويين.

 $(-\lambda, 5\lambda + 4, 3\lambda + 3)$  هي (D) هي أحداثيات نقط المستقيم (D) هي أحداثيات نقط المستقيم (P) لاحظ أن :

 $-2+(5\lambda+4)-3(3\lambda+3)+1=0$  معادلة المستوي (Q) .

نعين نفاطع (ABC) و (P) و (Q):

نعلم أن  $(P) \cap (Q) = (D)$  نعوض  $(P) \cap (Q) = (D)$  نعلم أن (D) في معادلة (ABC) نجد:

$$-\lambda + (5\lambda + 4) - (3\lambda + 3) - 2 = 0$$
$$\lambda = 1$$

. (P) 
$$\cap$$
 (Q)  $\cap$  (ABC) = {(-1;9;6)} وعليه  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ 

## (بكلوريا علمي 2010)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$  نعتبر المستوي (P) الذي معادلته (P) عرف بالجملة (P) نذكر أن محور الفواصل (O,i) يعرف بالجملة (D,i)

مع ٨ عدد حقيقي كيفي .

ب) حتى تكون A نقطة من  $(\Delta)$  يجب البحث عن عدد  $\int -3 = \lambda - 1$ 

حقیقی وحید 
$$\lambda$$
 محقق  $\lambda = -2\lambda - 4$  واضح أن  $0 = \lambda + 2$ 

 $_{-}(\Delta)$  يحقق الجملة و منه A نقطة من  $\lambda=-2$ 

 $\frac{1}{2}d \times AB$  هي ABC حيث = ج) مساحة المثلث

ومنه مساحة  $ABC=3\sqrt{2}$  هي  $d=2\sqrt{6}$ 

(بكلوريا علمي 2011) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس A(1;-2;1) ، المستوى (P) الذي يشمل النقطة  $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ 

و  $\vec{n}(-2;1;5)$  شعاع ناظمي له، و ليكن  $\vec{n}(-2;1;5)$ x + 2y - 7 = 0 المعادلة

(P) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

2) أ) تحقق أن النقطة B(-1;4;-1) مشتركة بين المستويين

(Q) بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم ( $\Delta$ ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) لتكن النقطة (C(5;-2;-1)

 $\begin{cases} -2x + y = 1 - 5t \\ x + 2y = 7 \end{cases}$  in the distribution of the contraction of the contra (Q) بين النقطة C و المستوي

ب) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

. ( $\Delta$ ) استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم

#### حل التمرين 16:

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوى (P):  $\vec{n}(-2,1,5)$  و A(1,-2,1) و ألمستوي (P) و المستوي  $M(x, y, z) \in (P)$  شعاع ناظمي له نفرض

 $\widehat{AM}(x-1, y+2, z-1)$ : etc.  $\widehat{AM}.\widehat{n} = 0$ : -2(x-1)+1(y+2)+5(z-1)=0: يعني آن  $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ -2x+2+y+2+5z-5=0: أي: 0 = 1 - 2x + y + 5z - 1 = 0 و عليه معادلة المستوي -2x+y+5z-1=0: (P)

(Q) أ) التحقق أن النقطة (Q) مشتركة بين المستويين (P)

: لأن B∈ (P)

-2(-1)+4+5(-1)-1=2+4-5-1=0

(-1)+2(4)-7=-8+8=0 :  $B \in (Q)$ 

(Q) و (P) و عليه النقطة B نقطة مشتركة بين المستويين  $(Q)_{e}$ ب) إثبات أن المستويين  $(P)_{e}$ و  $(Q)_{e}$  متقاطعان وفق مستقيم

 $: (\Delta)$ 

لدينا (-2,1,5) شعاع توجيه (P) و (-2,1,5) شعاع توجیه المستوی (Q) و بها أن n و n' غیر مرتبطین خطیا فإن (P) و (Q) غير متوازيين فهها إما متقاطعان وفق مستقيم (△).

Z = t لدينا:  $\begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$ 

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - 5t \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

x = 2t + 1 $t \in R$  مع  $y = -t + 3 : (\Delta)$ 

(3) لتكن النقطة (3;-2;-1)

C المسافة بين C و المستوي (P) ثم المسافة بين (P)

و المستوي (Q):

$$d(C,(P)) = \frac{|-2 \times 5 + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (5)^2}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d(C,(Q)) = \frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (-2 \times 1) + (2 \times 1) + (0 \times 5) = 0$$
 thuis if it is in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  is a second of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  is a second of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  is a second of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  is a second of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  of  $(P)$  in the interval of  $(Q)$  is a second of  $(Q)$  of  $(Q)$  of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  is a second of  $(Q)$  of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  is a second of  $(Q)$  of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  is a second of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  is a second of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  is a second of  $(Q)$  in the interval of  $(Q)$  i

 $(\Delta)$  و  $(\Delta)$  و  $(\Delta)$ 

بها أن المستويين (P) و (Q) متعامدان و متقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  و بتطبيق نظرية فيثاغورث :

$$D(C,(\Delta)) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9\times30}{25} + \frac{180}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{450}{25}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

## (بكلوريا علمي 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس C(3;-3;6) و B(2;1;7) ، A(0;1;5) النقط O(i;j;k) النقطة B أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة U(1;-4;-1) شعاع توجيه له.

 $\cdot$  ( $\Delta$ ) منتقى إلى المستقيم ( $\Delta$ ).

ج) بين أن الشعامين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم  $(\Delta)$  .

t حيث M(2+t;1-4t;7-t) حيث (2

عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على R بـ:

h(t) = AM

اكتب عبارة (۱) بدلالة ١.

 $t:h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$  عدد حقیقی ابن انه من أجل كل عدد حقیقی

ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي 1 التي تكون من أجلها
 المسافة AM أصغر ما يمكن.

 قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (۵).

#### حل التمرين 17:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \begin{cases} \lambda + 2 = 3 \\ -4\lambda + 1 = -3 \end{cases}$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = -3$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = -3$$

و بالتالي من أجل A = 1 ، النقطة C تتمي إلى A = 1 و بالتالي من أجل BC و بالتالي من أجل BC و متعامدان : AB و BC و عليه : AB و AB و عليه : AB BC = AB (2,0,2) و عليه : AB BC = AB (2,0,2) = AB (3,0,2) = AB (4,0,2) = AB (5,0,2) = AB (5,0,2) = AB (6,0,2) = AB (7,0,2) = AB (8,0,2) = AB (8,0) = AB

و بالتالي الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  متعامدان.

د) استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم  $(\Delta)$  :

بها أن B من  $(\Delta)$  و  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AB}$  متعامدان فإن :

$$d(A,(\Delta)) = AB = \sqrt{(2)^2 + 0^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

: t بدلالة (1) كتابة (1) بدلالة (1)

$$h(t) = AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$$

$$h(t) = \sqrt{(2+t)^2 + (1-4t-1)^2 + (7-t-5)^2}$$

$$h(t) = \sqrt{4 + 4t + t^2 + 16t^2 + 4 + t^2 - 4t}$$

$$h(t) = \sqrt{8 + 18t^2}$$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقى :

$$h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$$

الدالة h(t) قابلة للإشتقاق على R ودالتها المشتقة هي :

$$h'(t) = \frac{(8+18t^2)'}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

AM ج) قيمة العدد الحقيقي t التي يكون من أجلها المسافة h'(t) = 0 أصغر ما يمكن هي عندما يكون

t = 0 أي : 0 = 18 و عليه

القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي:

$$h(0) = \sqrt{8 + 18(0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
  
 $h(0) = d(A, (\Delta))$ :

#### التمرين 18:

(بكلوريا علمي 2013)

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس  $(o;ec{i}\,;ec{j}\,;ec{k})$  . نعتبر النقط:

D(2;0;-1), C(2;-1;1), B(1;0;-1), A(-1;1;3)

والمستوي (P) ذا المعادلة 2y + z + l = 0

x=-1  $y=2+\beta$ : ليكن ( $\Delta$ ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي ( $\Delta$ ) ليكن  $z=1-2\beta$ 

حيث eta وسيط حقيقي.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم نحقق أن المستقيم (BC) عتوى في المستوي (BC) .

(2) بين أن المستقيمين  $(\Delta)$ و (BC) ليسا من نفس المستوي.

(2) أ أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب/ بين أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم.

4) بين أن ABCD رياعي وجوه ، ثم أحسب حجمه.

#### حل التمرين 18:

(BC) كتابة غثيلا وسيطيا للمستقيم (1

نقطة من (BC) فإنها تحقق: M(x;y;z)

 $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ و  $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z+1)$  و  $\overrightarrow{BM} = \lambda . \overrightarrow{BC}$ 

ومنه: 
$$x = \lambda + 1$$
 حیث  $\lambda$  وسیط حقیقی.  $z = 2\lambda - 1$ 

(P) عتوى في المستقيم (BC) عتوى في المستوي

$$2y+z+1=0$$
 في معادلة  $x=\lambda+1$   $y=-\lambda$  نعوض كل من  $z=2\lambda-1$ 

0 = 0 نحصل على:  $0 = 1 + (2\lambda - 1) + (2\lambda - 1)$  أي (P)

(P)ومنه فإن المستقيم (BC) محتوى في المستوي

(2) إثبات أن المستقيمين  $(\Delta)$ و (BC) ليسا من نفس المستوي

(BC) شعاع توجيه للمستقيم للدينا:  $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ 

 $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$  و  $(\Delta)$  و نوجيه للمستقيم U (0;1;-2) و U

حجمه V: (و.ح)

$$V = \frac{1}{3} \left( \frac{CD \times BD}{2} \right) \times d((P); A)$$
$$= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{5} \times 1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 1$$

وعليه فإن الشعاعان  $\overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{U}$  غير مرتبطان خطيا وعليه يكون المستقيمان  $(\Delta)$  و (BC) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \end{cases}$$

$$z = 2\lambda - 1 \quad \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$

$$\lambda = -2$$
 : نضع:  $2 + \beta = -\lambda$  من (1) فإن:  $2 + \beta = -\lambda$  نضع:  $1 - 2\beta = 2\lambda - 1$  من (1)

eta=0 نعوض قيمة  $\lambda=-2$  في المعادلتين (2) و(3) نجد:  $\beta=0$  و  $\beta=3$  و  $\beta=3$  و منه  $\beta=3$  ليسا من نفس المستوي.

A و المستوي A عساب المسافة بين النقطة

(P): 
$$d((P); A) = \frac{|2(1) + (3) + 1|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب/ إثبات أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم. D نعوض إحداثيات D في معادلة D نجد: D وعليه فإن D نقطة من D.

$$BC = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$$
 ولدينا: 
$$BD = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$$

$$CD = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$
  
 $BC^2 = BD^2 + CD^2$  : نلاحظ أن

D ومنه حسب فيثاغورث فإن: المثلث BCD قائم في

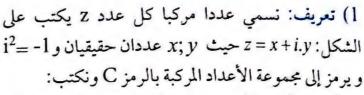
4) إثبات أن ABCD رباعي وجوه ، ثم حساب حجمه.:

D و (P) عتوى في المستوي (BC) و (BC)

ABCD من  $A \not\in (P)$  مثلث و BCD فإن

رباعي وجوه .

# الأعداد المركبة والتحويلات النقطية



$$C=z$$
 /  $z=x+iy$  ;  $x,y\in R$  ;  $i^2=-1$  - يسمى  $x$  الجزء الحقيقي للعدد المركب  $z$  ويرمز له بالرمز . Re(z)

- يسمى y الجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز Im(z)

ونكتب عندئذ وبصفة عامة:

$$z = x + i.y$$
: الشكل الجبري لعدد مركب المشكل الجبري عدد مركب حيث المشكل الجبري العدد مركب

$$z = x + i.y$$
 :مرافق العدد المركب

$$\overline{Z} = x - iy$$
: حیث  $x; y$  عددان حقیقیان هو خواص مرافق عدد مرکب:

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \cdot$$

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}.$$

$$z\neq 0$$
 مع  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  •

$$z+\bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z-\bar{z}=2iIm(z)$$
 •

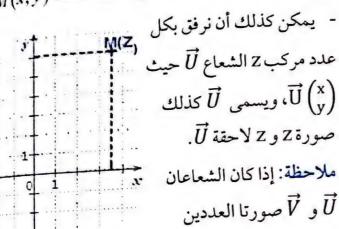
$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \cdot$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \cdot$$

$$z'\neq 0$$
  $\sim$   $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}}$ .

 $(o; \vec{i}; \vec{j})$  التمثيل النقطي لعدد مركب: في م م م م م M(x; y) النقطة M(x; y) صورة العدد المركب

M(x;y) هو لاحقة النقطة z=x+i.y العدد المركب



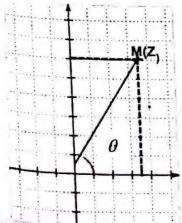
المركبين Z وZ'على الترتيب يكون الشعاع  $\vec{U}+\vec{V}$  هو صورة العدد المركب Z+Z' ، ويكون الشعاع  $\vec{U}-\vec{V}$  هو صورة العدد المركب Z-Z'.

4) طويلة وعمدة عدد مركب : M نقطة معرفة بإحداثيها (x, y) أو بإحداثيها القطبية (x, y) لدينا: OM = r

 $x=rcos\theta$   $y=rsin\theta$  و  $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})=\theta$  و  $sin\theta=\frac{y}{r}$   $cos\theta=\frac{x}{r}$ : ومنه ينتج  $\overrightarrow{r}=\frac{x}{r}$  وطويلة العدد المركب  $\overrightarrow{r}=\frac{y}{r}$ 

$$\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

•عمدة العدد المركب Z: [ [ ] [ ] [ ]



$$\arg(Z) = \theta + 2k\pi$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

## الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

## خداص الطويلة والعمدة

| العدد المركب   | الطويلة  | العملة             |
|----------------|----------|--------------------|
| -              | r        | θ                  |
| and the second | r'       | $\theta'$          |
| zn             | $r^n$    | nθ                 |
| z.z'           | rs'      | $\theta + \theta'$ |
| =              | <u>r</u> |                    |
| z'             | r'       | $\theta - \theta'$ |

ملاحظات: B، A نقطتان من المستوي لاحقتاهما Z<sub>A</sub> و Z<sub>B</sub> على الغرتيب:

- $AB = |z_B z_A| (1$
- $arg(z_B-z_A) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AB})$  (2)
- $arg(z_B)$ - $arg(z_A) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  (3)
  - 5) الشكل المثلثي لعدد مركب:

#### نعريف: Z عدد مركب غير معدوم.

r= |z| بسمى هذا الشكل بالشكل المثلثي المثلثي للعدد المركب Z.

## 6) الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم:

1) نعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و 6 عمدة له يكتب  $e^{i\theta}$ حيث:  $e^{i\theta}$  =  $\cos\theta$ +isin تسمى هذه الكتابة بترميز  $z=r\cos\theta+r\sin\theta$  مع  $z=r\cos\theta$  فإن:

z= re<sup>i0</sup> تسمى هذه الكتابة الشكل الأسبى للعدد المركب Z 2.خواص:

 $\theta$ و  $\theta$  عددان حقیقیان:

 $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}$ 

 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \cdot \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$ 

3.دستور موافر: Z عدد مركب طويلته T و 6 عمدة له من  $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{\mathrm{n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\,\theta}$  :غير معدوم لديناnغير عدد طبيعي

#### 7) المعادلات من الدرجة الثانية:

#### 1.مرهنة:

az² +bz+e=0 : z لتكن المعادلة ذات المجهول المركب - حيث c,b,a أعداد حقيقية مع  $\Delta = b^2$  طود معزها.  $z=-\frac{b}{2a}$ اذا كان  $\Delta=0$ : فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا  $0=\Delta$ -إذا كان 0 <∆: فإن المعادلة تقبل حلين متايزين  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ 

- إذا كان 0>∆: فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين وذلك  $\Delta$ بوضع  $i^2 = -1$  في عبارة

2. الجذران التربيعيان لعدد مركب:

Zo عدد مركب معطى . الجذرين التربيعيين للعدد Zo هما Cحلا المعادلة  $z^2=z_0$  في المجموعة

#### الأعداد المركبة والتحويلات النقطبة

Zالعدد Z الشكل Z=r الحقتها Z و Z=r التكن النقطة Z=r الحقتها Z و Z=r العدد Z المحقتها Z و ZM' النقطى في المستوى يرفق بكل نقطة M النقطة  $(b \in C)$  عيث Z' = a.Z + b و Z' = a.Z + b

| a نیم              | طبيعة<br>التحويل <i>T</i> | عناصره المميزة  |
|--------------------|---------------------------|---|
| a=1                | انسحاب                    | $z_0 = b$ شعاعه $ii$ لاحقته   |
| a∈ R*-{1}          | تحاكي                     | $\Omega$ نسبته $a=a$ ومركزه النقطة الصامدة $a=b=1-a$ لاحقتها  |
| a ∉ R<br> a  = 1   | دوران                     | مركزه النقطة الصامدة $\Omega$ لاحقتها $\theta = \arg(a)$ : وزاويته $\sigma = \frac{b}{1-a}$             |
| ) a ∉ R<br> a  = 1 | تشابه مباشر               | مركزه النقطة الصامدة $\Omega$ لاحقتها $	heta=0$ $arg(a): مركزه وزاويته z_0=rac{b}{1-a} وزاويته k= a :$ |

# تمارين

$$(\overline{Z}, \overline{Z}) = Z^{2009}$$
 ،  $(\overline{Z}, \overline{Z}) = Z^{2009}$  و  $(\overline{Z}, \overline{Z})$ 

$$\frac{1}{Z} = \left[ \frac{1}{2\sqrt{2}}, \left( \frac{-7\pi}{12} \right) \right]$$
 لدينا •

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z^{2009} = \left[ \left( 2\sqrt{2} \right)^{2009}, \frac{7 \times 2009\pi}{12} \right] \bullet$$

ولدينا: 11 + 12×12 + 11 = 14063 = 1171 = 7×2009

$$14063 = 1172 \times 12 - 1$$
 أي

$$\frac{14063\pi}{12} = 1172\pi - \frac{\pi}{12}$$
: و منه

$$Z^{2009} = \left[ \left( 2\sqrt{2} \right)^{2009}, \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right]$$
 : و منه

$$Z^{2009} = \left(2\sqrt{2}\right)^{2009} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\overline{Z} = \left[2\sqrt{2}, \left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$\widetilde{Z} = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

عين الطويلة و عمدة للعدد المركب Z في كل حالة من الحالات التالية:

$$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

 $Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$  is in its later with  $Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$ 

1) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري ·

2) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

 $\overline{Z}$  و  $Z^{2009}$ ,  $\frac{1}{7}$ : أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية

#### حل التمرين 01 :

1) كتابة العدد المركب Z على الشكل الجبري:

$$Z = \frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = (1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

2) كتابة العدد المركب Z على الشكل المثلثي:

$$Z = (1+i)(1+i\sqrt{3})$$
 لدينا

$$z_2 = (1+i\sqrt{3})$$
و ليكن  $z_1 = (1+i)$ 

$$k\in Z$$
 مع  $Arg(z_1)=rac{\pi}{4}+2k\pi$  ،  $\left|z_1\right|=\sqrt{2}$  لدينا

$$z_1 = \left\lceil \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right\rceil \text{ and }$$

$$k \in \mathbb{Z}$$
  $L = Arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$   $L_2 = 2$ 

$$z_2 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right] c_0$$

$$|Z| = 2\sqrt{2} \quad \text{as } Z = z_1 \times z_2$$

$$Arg(Z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

. 
$$Z = 4 \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
 (1)  $Z = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$  و بالنالي  $Z = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$  و بالنالي  $Z = \left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 

$$Z = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

# الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

$$Z = -2\left(\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(-\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\sin(-\frac{\pi}{6}) + i\cos(-\frac{\pi}{6})\right)$$

$$Z = 2\left(\cos(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6})) + i\sin(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6}))\right) \stackrel{!}{\downarrow}$$

$$Z = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right) \stackrel{!}{\downarrow}$$

$$E = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$$

 $(O; \vec{i}; \vec{j})$  المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:  $z^2 - 8\sqrt{3}.z + 64 = 0$ 2) نعتبر النقطتين A و B لاحقتاها على الترتيب:

 $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$  ,  $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ أ/ أكتب  $z_{A}$  و  $z_{B}$  على الشكل الأسى .

. OAB با طبيعة المثلث

 $z_C = -\sqrt{3} + i$  لتكن C النقطة ذات اللاحقة (3  $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}.z_C$ : و لتكن النقطة D حيث

D azi Y - azi

 $\{(B,1),(D,1),(O,-1)\}$  نسمي G مرجح الجملة (4

 $Z_G = 4\sqrt{3} + 6i$  : أ/ برر وجود G ثم بين أن لاحقتها

أمن المستوي التي تحقق العلاقة الأتية :

$$BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$$

$$Z = \sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) (\xi)$$
$$Z = -2 \left( \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \right) (\xi)$$

# حل التمرين 02 :

تعين طويلة و عمدة العدد المركب Z :

$$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

 $k \in Z$   $\longrightarrow Arg(Z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$   $\longrightarrow |Z| = 4$ :

$$Z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad (9)$$
$$= 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 3\left(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})\right)$$

 $k \in Z$ ون  $Z = 3 + 2k\pi$  ون |Z| = 3

$$Z = \sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$Z = \sqrt{2} \left( \cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}) \right) \omega_{3}$$

. 
$$OG$$
 ،  $DG$  ،  $BG$  بالسافات  $Z$  مع  $Z$  مع النقط  $Z$  مع النقط  $Z$  مع النقط  $Z$  مع النقط  $Z$  من المستوى التي تحقق العلاقة الأتية :



## حل التمرين 03 :

 $Z^2 - 8\sqrt{3}Z + 64 = 0$ : حل المعادلة: (1 نحسب المميز المختصر Δ':

$$\Delta' = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - (1)(64) = -16 = (4i)^2$$

وعليه فالمعادلة تقبل حلان متمايزان:

$$Z' = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{1} = 4\sqrt{3} - 4i$$

$$Z'' = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{1} = 4\sqrt{3} + 4i$$

 $^{2}$  كتابة كلا من  $^{2}$  و  $^{2}$  على الشكل الأسي :

$$z_B = 4\sqrt{3} + 4i$$
  $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ 

 $z_A$  تعين طويلة وعمدة

$$|z_A| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$Arg(z_A) = \theta : \begin{cases} \cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

 $(k \in Z)$ : حيث  $Arg(z_A) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  : وعليه فإن

$$z_A = 8 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$
 :  $z_A$  ومنه الشكل المثلثي لـ  $z_A$ 

 $z_B$  تعين طويلة وعمدة

تعین طویله وعمده 
$$|z_B| = |z_A| = 8$$
 بیا آن  $|z_B| = |z_A| = 8$  بیا آن  $|z_B| = |z_A|$  بیا آن  $|z_B| = |z_A|$  بیا آن  $|z_B| = |z_A|$ 

$$Arg(z_B) = -Arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
 $z_B = 8 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} : z_B$  ومنه فالشكل المتلئي ل

$$z_B = 8 \cdot e^{-x}$$
:  $z_B$  ومنه فالشكل المتلثي ل

$$z_D = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot z_C : z_D$$
 تعيين لاحقة (3

$$e^{i\binom{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
 لدينا:

 $4 = \frac{z_s + z_0 - z_0}{1 + 1 + (-1)} = 4\sqrt{3} + 4i + 2i - O = 4\sqrt{3} + 6i$ : OG; DG; BG ب/ حساب المسافات

$$BG = |z_G - z_B| = |4\sqrt{3} + 6i - 4\sqrt{3} - 4i| = |2i| = 2$$

$$DG = |z_G - z_D| = |4\sqrt{3} + 6i - 2i| = |4\sqrt{3} + 4i|$$

۱/ G موجودة لأن: 0 ≠ 1 = (-1) + 1 + 1 وتحفق

: G تعيين لاحقة  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{0}$  الملاقة

$$=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(4)^2}=8$$

$$OG = |z_G| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

ج) تحديد حسب قيم / مجموعة النقط M التي تحقق:

$$BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$$

$$BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$$
 الدينا:

$$\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 = \lambda$$

$$BG^{2}+GM^{2}+2\cdot \overrightarrow{BG}\cdot \overrightarrow{GM}+DG^{2}+GM^{2}+=\lambda$$

$$2\overrightarrow{DG}\cdot \overrightarrow{GM}-OG^{2}-2\overrightarrow{DG}\cdot \overrightarrow{GM}-GM^{2}$$

$$BG^2 + DG^2 + -OG^2 + 2GM \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG}\right) + GM^2 = \lambda$$

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$$
:  $\overrightarrow{OG}$ 

$$GM^2 = \lambda - BG^2 - DG^2 + OG^2$$

$$= \lambda - 4 - 8 + 84 = \lambda + 72$$

$$GM^2=0$$
 : نان د  $\lambda=-72$ 

. G هي النقط M هي النقطة

. 
$$\lambda > -72$$
 إذا كان  $\lambda + 72 > 0$  إذا كان

فإن مجموعة النقط 11 هني جميع نقاط الدائرة التي مركزها

$$r = \sqrt{\lambda + 72}$$
 ونصف قطرها  $G$ 

اذا كان  $\lambda < 72 < 1$  أي  $\lambda + 72 < 0$  فإن مجموعة اذا كان  $\lambda = 72$ 

النقط M هي مجموعة خالية .

 $|z_{D}| = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2i$ 

196

٢٤ سل في محوعة الأعداد المركبة كالمعادلة ذات المجهول 2 المعادلة ذات المجهول 2 المعادلة ذات المجهول 2 المعادلة على الشكل الأسي .
 ٢٤ سال عادة المعادلة على الشكل الأسي .

(z) يعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (z) يعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (z) . (z) (z)

 $\frac{z_H-z_A}{z_H-z_C}$  ب اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_H-z_A}{z_H-z_C}$  و عمدة له ثم ما عبن طويلة العدد المركب  $\frac{z_A-z_A}{z_H-z_C}$  و عمدة له ثم المنتج طبيعة المثلث ABC

M ذات T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات T ذات اللاحقة Z بحيث :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3 - i\sqrt{3}$$

T عِنْ صَبِعة التحويل T و عناصره المميزة.  $\mathcal{T}$  عِنْ صورة النقطة  $\mathcal{A}$  بالتحويل  $\mathcal{T}$  .

جا استتج طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة.

#### حل التعرين 04 :

 $\Delta = -12 = 12i^{2}, z^{2} - 2z + 4 = 0: C \text{ i.e.} \qquad (1)$   $z_{2} = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_{1} = 1 + i\sqrt{3} \text{ i.e.} \qquad (2)$   $|z_{1}| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 \text{ i.e.} \qquad (2)$   $\text{arg}(z_{1}) = \text{arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi...k \in \mathbb{Z}$   $z_{2} = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \qquad z_{1} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$   $z_{2} = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \qquad z_{1} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$   $z_{2} = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \qquad z_{3} = 1 + i\sqrt{3}$   $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right) \text{ i.e.} \qquad C, B, A \text{ i.e.} \qquad (1)$   $B\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$   $e^{2z} = \frac{\pi}{3}$ 

 $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$  ب) الشكل الجبري لـ  $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_C}$ 

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2i\sqrt{3}}{2} = -i\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$$
: عمدته  $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$  طویلة  $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{\pi}{2}$  و عمدته  $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{\pi}{2}$  و

 $...k \in z$  المثلث ABC: بما أن

$$Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

فان المثلث ABC قانم في B.

3) أ) طبيعة التحويل T: لدينا العبارة المركبة للتحويل T:

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3 - i\sqrt{3}$$

بما ان  $1 \neq 2 = |-i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$  فان T تشابه نسبته 2 و زاویته  $z_{\Omega} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = -1 - i\sqrt{3} = z_{C}$  و مرکزه  $\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ 

ب) صورة النقطة A بالتحويل T:

$$z_{B}^{\ \prime} = (1 - i\sqrt{3})z_{A} + 3 - i\sqrt{3}$$
 $z_{B}^{\ \prime} = (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) + 3 - i\sqrt{3}$  إي  $z_{B}^{\ \prime} = 7 - i\sqrt{3}$ 

جـ) طبیعة ToT بما أن T تشابه فان ToT تشابه نسبته  $arg(ToT) = -\frac{2\pi}{3}$  هي  $|a| \times |a| = 4$  هي  $|a| \times |a| = 4$ 

#### العرين 05

المعادلة ذات المجهول C=-1 في مجوعة الأعداد المركبة C=-1 المعادلة ذات المجهول C=-1 المتالية : C=-1 المتالية : C=-1 المتالية : C=-1 المتالية المتعامد والمتجانس C=-1 المتالية المتعامد والمتجانس C=-1 المتالية المتا

ب) أحسب الأطوال AB،OB،OA ثم استنتج طبيعة . OAB

 $E_D=-\sqrt{3}+i$  و  $Z_D=-\sqrt{3}+i$  و صورتها D بالدوران الذي مركزه D وزاويته D

E عين  $Z_{e}$  لاحقة النقطة  $Z_{e}$ 

 $\{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$  د) نسمي G مرجح الجملة المثقلة المثقلة (G: د) نسمي G مرجح الجملة المثقلة (G: د) نسمي G مرجح الجملة المثقلة (G: د) نسمي G

: علل وجود النقطة G و بين أن هذه النقطة لاحقتها هي  $z_{g}=4\sqrt{3}+6i$ 

هـ) بين أن النقط G.E.D على استقامة واحدة.

: حين (E) بحيث النقط M ذات اللاحقة Z بحيث -3

 $\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO} = \vec{MA} - \vec{MB}$ 

#### حل التمرين 05:

 $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0: C \text{ at } (z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$   $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$   $z^2-8\sqrt{3}z+64=0 \text{ for } z=4$   $z^2-8\sqrt{3}z+64=0 \text{ for } z=4$   $z=4\sqrt{3}-4i \text{ for } \Delta=-64=64i^2$   $s=\left\{4\sqrt{3}+4i;4\sqrt{3}-4i;4\right\}$   $z=4\sqrt{3}+4i$ 

أ) كتابة م و و على الشكل الأسي :

 $|z_B| = \left|4\sqrt{3} + 4i\right| = 2$ 

 $\arg(z_B) = \arg(4\sqrt{3} + 4i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi...k \in Z_3$ 

 $z_{B} = 8e^{\frac{i\pi}{6}}$   $z_{A} = 8e^{\frac{i\pi}{6}}$ 

 $OB = |z_B| = 8, OA = |z_A| = 8$ : AB, OB, OA ب) الأطوال

 $OAB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$ 

متقايس الأضلاع

$$z_D = -\sqrt{3} + i$$
:  $(=$ 

 $\frac{\pi}{3}$  صورة E بالدوران الذي مركزه E وزاويته D معناه  $z_E = e^{i\pi\over 3} z_D$ 

$$z_{E} = (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})(-\sqrt{3} + i)$$

$$z_{E} = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\sqrt{3} + i) = 2i \text{ (a)}$$

 $: \{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$  مرجح الجملة

بما أن G 
eq 1+1+1+1=1 فان G موجودة

$$z_G = \frac{-z_O + z_B + z_A}{1} = z_B + z_A = 4\sqrt{3} + 6i$$

هـ) النقط G, E, D على استقامة واحدة معناه

 $\alpha \in R$   $\alpha = \frac{z_E - z_D}{z_G - z_D} \quad \overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DG}$ 

G, E, D ومنه النقط  $\frac{z_E - z_D}{z_G - z_D} = \frac{\sqrt{3} + i}{5\sqrt{3} + 5i} = \frac{1}{5}$ 

على استقامة واحدة.

: عين (E) عين (E) مجموعة النقط (E) ذات اللاحقة

$$||\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}|| = ||\vec{MA} - \vec{MB}||$$

$$||\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}|| = ||\vec{MG}||$$

$$||\vec{MA} - \vec{MB}|| = ||\vec{MA} + \vec{BM}|| = ||\vec{BA}||$$

$$||\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}|| = ||\vec{MA} - \vec{MB}||$$

$$||\vec{MG}|| = ||\vec{BA}||$$

$$||\vec{AG}|| = ||\vec{BA}||$$

تكافئ MG = BA ومنه مجموعة النقط MG = BA الني مركزها G و نصف قطرها BA = BA

#### الترين 06

P(z) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود  $P(z) = 2z^3 - z + 1$  : للمتغير المركب z حيث : P(z) = 0 للمعادلة P(z) = 0 بين أن العدد P(z) = 0

c و b ، a بحيث و بعين الأعداد الحقيقية وb ، a

$$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$$

ج) حل في المجموعة C المعادلة : P(z)=0 ثم اكتب هذه الحلول على الشكل الآسي.

(O; u, v)المسنوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $z_u = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, z_A = -1$  النقط  $z_u = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, z_A = -1$  صور الأعداد المركبة  $z_c = \overline{z_B}$  و  $z_c = \overline{z_B}$ 

ا عين اللاحق  $z_D$  للنقطة D مرجح الجملة  $\{(A;1);(B;1);(C,-1)\}$ 

ب) لتكن E صورة E بالتحاكي الذي مركزه E ونسبته  $\frac{3\pi}{2}$  . E مورة E بالدوران الذي مركزه E و زاويته E على الدريب E عبن E على الترتيب . E عبن E على الترتيب .

#### حل التمرين 06:

 $P(z) = 2z^3 - z + 1$  نعتبر:

P(-1)=0 العدد (1-) حل للمعادلة P(z)=0 معناه (-1) العدد (2 $z^3-z+1=az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c$ 

$$\begin{cases} a=2 \\ b+a=0; b=-2 \end{cases}$$
 بالطابقة نجد  $c+b=-1$ 

 $P(z) = (z+1)(2z^{2}-2z+1)$  z+1 = 0 |z| = 0 |z| = 0 |z| = 0 |z| = 0

 $\Delta = -4 = 4i^2 \quad 2z^2 - 2z + 1 = 0$ 

 $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ,  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ 

: يركب على الشكل الأمي:

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot z_6 = e^{i\pi}$$

C.B.A (2 صور الأعداد المركبة :

$$z_{c} = \frac{1}{2} \frac{i}{2} \underbrace{z_{c}} = z_{n}$$
,  $z_{n} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cdot z_{A} = -1$ 

: معناه  $\{(A;1);(B;1);(C,-1)\}$ معناه  $z_{I},(1,-1)$ 

$$z_D = \frac{z_A + z_B - z_C}{1 + 1 - 1} = -1 + i$$

2 ونسبته E مورة E بالتحاكي الذي مركزه E ونسبته  $z_E=2z_B+(1-2)z_C$  معناه

$$z_E = 2(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$
 (1)

 $rac{3\pi}{2}$  صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته F

$$z_F = e^{\frac{3\pi}{2}i} z_C + (1 - e^{\frac{3\pi}{2}i}) z_B \qquad :$$

$$= -i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(1 + i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

#### المرين 07

 $z^2 - 6z + 34 = 0$  المعادلة c = 2 + 34 = 0. المعادلة c = 2 + 34 = 0 المعادلة c = 2 + 34 = 0 المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس c = 3 + 3i المقطة c = 7 + 3i , c = 3 + 3i , c = 3 + 3i المقطة c = 3 + 3i المقطة c = 3 + 3i المستوي c = 3 + 3i المنسجاب c = 3 + 3i المنسجان c

# الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

أ) لتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقنها |z'|=1 حيث |z'|=1

\*\* عين و أنشئ (F).

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقنها z حيث يكون z' تخيليا صرفا ، برهن أن : النقطة z' تنتمي إلى (E) ثم عين (E) .

 $\frac{\pi}{2}$  الدوران الذي مركزه  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

. R أ) عين لاحقة B' صورة B بالدوران

 $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$  ب عين لاحقة I صورة I بالدوران R حيث:  $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$  عين صورتي  $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$  بالدوران  $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 

#### حل التمريين 08 :

 $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$  (1  $z^2-z+2=0$  أو z=2i : معناه : z=2i و جذراه التربيعيان هما  $\Delta=-4$  المعادلة :  $\Delta=-2z+2=0$  تقبل حلين هما

 $z_1 = 1 + i$ : تقبل حلين هما  $z^2 - 2z + 2 = 0$ : المعادلة  $z_2 = 1 - i$  و عليه حلول المعادلة  $z_2 = 1 - i$ 

 $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ 

 $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ,  $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  ولدينا:

.  $z \neq 1+i$  : حیث  $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$  (أ (2)

التي تحقق |z'|=1 هي محور M التي تحقق |z'|=1 القطعة [AB].

ب) (E) هي مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من أجلها z' تخيليا صرفا .

:(E) ثم تعيين (E) ثم تعيين (E) \*

# حل التمرين 07 :

:  $z^2 - 6z + 34 = 0$  حلا المعادلة /1

 $\Delta = (-6)^2 - 4.(1)(34) = -100 = (10.i)^2$ : لدينا

 $Z_{1} = \frac{6 - 10.i}{2}$  : و عليه المعادلة تقبل حلين متهايزين

 $z_2 = 3 + 5i$  و  $z_1 = 3 - 5i$  و  $Z_2 = \frac{6 + 10i}{2}$ 

 $\overline{MM'} = \overline{u}$  و بالانتقال /2 من تعريف الانسحاب : المن تعريف اللاحقتين نجد :

z' = z + 4 - 2i : z' - z = 4 - 2i

 $\frac{b-c}{a-c} = \frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}$   $= \frac{-4-8i}{-4+2i} \times \frac{-4-2i}{-4-2i} = \frac{40i}{20} = 2i$ 

النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T معناه :

وهذا محقق  $z_C = z_A + 4 - 2i$ 

 $\frac{b-c}{a-c}=2i$  من المساواة :ABC ج) استنتاج طبيعة المثلث

 $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ : نستنتج أن

 $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i|$  : نستنتج أن أن  $\frac{b-c}{a-c}=2i$  من المساواة

C قائم في النقطة ABC إذن: المثلث  $\frac{BC}{AC}=2$ 

BC = 2 AC

#### العريز 08:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (الوحدة 2cm)

 $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$  : محل في C المعادلة (1

(اكتب الحلول على الشكل الجبري ثم الأسي)

 $z_B=2i$ ، نقطتان لاحقتاهما: B,A (2

من أجل كل عدد مركب z نعتبر العدد المركب عيث:

 $z_{B'} = \frac{2i-2i}{2i-1-i} = 0$  و العدد  $z_{B'} = \frac{2i-2i}{2i-1-i}$ 

 $\cdot$  (P(-1) عن P(-1) عن P(-1) عن P(-1)b. a حيث  $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

P(z)=0 المعادلة C ج $^{\circ}$  حل في 2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (0,1,1) نعتبر النقط C, B, A التي لواحقها :

على الترتيب  $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}z_C = 2 - i\sqrt{3}$  $|z_B - z_C|$  ,  $|z_B - z_A|$  ,  $|z_C - z_A|$  . استنتج طبيعة المثلث ABC .

 $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$ ب) عين $z_G$  لاحقة G مرجع الجملة  $L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$  ج) احسب طويلة وعمدة للعدد المركب ثم اكتب L على الشكل الاسي.

د) بين ان $L^{2008}$  عددا حقيقيا موجبا .

ه) استنتج طبيعة المثلث GAC .

#### حل التمريين 09:

P(z)=0 حلا للمعادلة  $z_0$  البات انه اذاكان و $z_0$  حلا للمعادلة فان  $\overline{z_0}$  حلا لها ابضا:

 $P(z_0) = z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7 = 0$  :لدينا  $\overline{P(z_0)} = \left(\overline{z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7}\right) = 0$  $\overline{P(z_0)} = \overline{z_0}^3 - 3\overline{z_0}^2 + 3\overline{z_0} + 7 = 0$  $P(\bar{z}_0) = \bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0^2 + 3\bar{z}_0 + 7$  $P(\bar{z}_0) = 0$  فإن : P(−1) بارحساب

 $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$  $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ نعين a وطحيث:

$$P(z) = (z+1)(z^{2} + az + b)$$

$$= z^{3} + az^{2} + bz + z^{2} + az + b$$

$$= z^{3} + (a+1)z^{2} + (b+a)z + b$$

 $_{c}$  (E) المنتمي الى  $_{d}$ « بِكُونَ 'z تُخيليا صرفا إذا كان 0='=  $\arg z' = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}_{j}$ وعليه: z = 2i

$$z = 2i$$

$$\int_{\mathcal{I}} \left( \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}$$

والمجموعة(E)هي الدانرة التي قطرها (AB) باستثناء

عبارة 
$$z' - \left(\frac{3}{2} + i\frac{5}{2}\right) = i\left(z - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right)$$
 (1) (3)

الدوران R الذي مركزه  $\Omega$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

$$z_{B'} = i\left(2i - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}$$

ب)  $z_{B'}=2+i$  هي صورة B بالدوران R و بالمثل:  $Z_{I'} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ 

(F) بالدوران (F) و (F) بالدوران (F)

النقطة I هي منتصف القطعة [AB] أي أن I هي مركز\* $\cdot$  (E) الدائرة

و بها أن الدوران يساوي قياس فإن صورة (E) هي الدائرة  $\frac{1}{2}$  التي مركزها I' و لهما نفس نصف القطر (E')

 $^*$ صورة Fبالدوران R هي محور القطعة [A'B']حيث : B' = R(B) , A' = R(A)

1)نعتبر كثير الحدود (P(z للمتغيرالمركب z حيث:  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$  $\overline{z_0}$  يين انه اذاكان  $z_0$  حلا للمعادلة P(z)=0 فان أ  $(z_0$  مرافق  $\overline{z_0})$  علا لها ايضا

$$L^{2008} = \sqrt{3}^{2008} e^{\frac{2008\pi}{2} I}$$

$$= \sqrt{3}^{2008} \left( \cos \frac{2008\pi}{2} + i \sin \frac{2008\pi}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3}^{2008} \left( \cos 1004\pi + i \sin 1004\pi \right)$$

$$= \sqrt{3}^{2008} (\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{3}^{2008} = 3^{1004}$$

$$= (GAC) = \frac{1}{2} (\cos 0 + i \sin 0) = \frac{1}{2} (\cos 0 + i$$

: بها آن: 
$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \sqrt{3} : \text{ where } \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \sqrt{3}$$

$$|z_A - z_C| = \sqrt{3} |z_G - z_C|$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$(\longrightarrow \longrightarrow) \quad \pi$$

ومنه: نستنتج أن المثلث GAC قائم في النقطة C.

الما المائية نجد: 
$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$$
  $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \\ b + a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -3 \end{cases}$   $\begin{cases} a = -4 \end{cases}$ 

### (بكالوريا علوم تجريبية 2008)

 $Z_1$  حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :  $Z^2 - (1+2i)Z - 1+i=0$  . نرمز للحلين بالرمز  $Z_1$  و  $Z_2$  حيث :  $Z_2$  عدد حقيقي .  $Z_2 = |Z_1| = |Z_2|$  عدد حقيقي .

2) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ . B , A و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب  $C_1, C_2, C_1$  ليكن العدد المركب  $C_2, C_1, C_2$  حيث :

 $.Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1}$ 

 $Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1}$ : ليكن العدد المركب لا حيث

 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ : انطلاقا من التعريف) ا

 $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i heta_1} imes e^{i heta_2}$  : ومن الخاصية

 $rac{e^{i heta_1}}{e^{i heta_2}}=e^{i( heta_1- heta_2)}:$ برهن أن :  $e^{-i heta}=rac{1}{e^{i heta}}:$ ن برهن أن :  $e^{-i heta}=rac{1}{e^{i heta_1}}$  عداد حقیقیة .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

 ج) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته ونسبته.

#### حل التمرين 10

1) - حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

$$Z^2 - (1+2i)Z - 1 + i = 0$$

 $\Delta = (1+2i)^2 - 4(1)(-1+i) = 1+4i-4+4-4i=1$   $e^{-1}$ 

$$Z' = \frac{1+2i-1}{2} = i \quad Z'' = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i$$

$$Z_{2} = 1+i \quad Z_{i} = i \quad |i| + |i| \quad |i| + |i| \quad |i| \quad$$

: عدد حقيقي $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$  إثبات أن

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$
: لدينا

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008} \left[ \left(\cos 2008 \times \frac{\pi}{4} + i \sin 2008 \times \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008} = \frac{1}{2^{1004}} \in R$$

. و عليه فإن  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي

 $(O, \vec{u}, \vec{v})$  المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس المنسوب الى معلم

B , A و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب

$$Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1} C(1,1); B(0,1); A(1,0)$$
  $C(1,1); B(0,1); A(1,0)$   $C(1,1); B(0,1); A(1,0)$ 

$$: \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}:$$
 ا) برهان أن  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}:$  أ

 $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ :لدينا

 $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$  : وعليه فإن

 $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2}$ : من جهة أخرى

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1 - i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

ب) كتابة Z على الشكل الأسي:

$$Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1} = \frac{1 + i - 1}{i - 1} = \frac{i}{-1 + i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$
$$Z = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 3\pi\right)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

# $Z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(Z + \frac{1}{2}i\right)$ : المعرف بـ:

#### حل التمرين 11:

$$\Delta = (i)^{2} - 4 \times (-2 - 6i) : \frac{1}{2}$$

$$= -1 + 8 + 24i$$

$$= 7 + 24i$$

حساب جذر تربيعي لـ ۵:

نبحث عن عددين حقيقيين X و ٧ حيث:

$$(x+iy)^2 = 7 + 24i$$

: تكافئ (x + iy)<sup>2</sup> = 7 + 24i تكافئ

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 7 + 24i$$

بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة أن :

$$\left| \left( x + iy \right)^2 \right| = \left| 7 + 24i \right|$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$
 ائي  $x^2 + y^2 = 25$   $x^2 + y^2 = 25$  نستنج أن  $x^2 + y^2 = 7$  : نستنج أن  $x^2 + y^2 = 24$ 

$$\begin{cases} x^2 = \frac{25+7}{2} = 16 \\ y^2 = \frac{25-7}{2} = 9 \\ 2xy = 24 \end{cases} : \text{ if } y = \frac{25-7}{2} = 16$$

و منه: x = 4 و y = 3.

$$z_2 = \frac{-i+4+3i}{2} = 2+i$$
 و  $i3+4:\Delta$  جذر تربيعي لـ  $z_1 = \frac{-i-4-3i}{2} = -2-2i$  و

ج) كتابة Z على الشكل المثلثي:

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$
لدينا

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right]$$
 ومنه

استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته و نسبته :

$$z_2 - 1 = z(z_1 - 1)$$
: و بالتالي  $Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1}$  : لدينا

$$z_2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] (z_1 - 1)$$
يذن:

A أي أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه C أي أن النقطة  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  و زاويته  $-\frac{\pi}{4}$  .

#### النمرين 11

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

- : Z حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول C :  $C^2 + iZ 2 6i = 0$
- 2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ .

النقطتين B , A اللتين لاحقتاهما على الترتيب  $Z_B, Z_A$  على

$$Z_B = -2 - 2i \ Z_A = 2 + i : 1$$

[AB] عين $Z_{\omega}$  لاحقة النقطة  $\omega$  مركز الدائرة

. 
$$Z_{C} = \frac{4-i}{1+i}$$
 :حيث  $Z_{C}$  النقطة ذات اللاحقة (3

أكتب  $Z_c$  على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة  $Z_c$  تنتمي

 $(\Gamma)$  إلى الدائرة

 $M_0(Z_0)$ اً- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه  $M_0(Z_0)$  و نسبته  $H_0(Z_0)$  و زاويته  $H_0(Z_0)$  و نسبته  $H_0(Z_0)$ 

$$Z'-Z_0=Ke^{\theta}(Z-Z_0)$$
: هي  $M'(Z')$  النقطة  $M(Z)$ 

ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل Z

### الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

 $(\Gamma)$  المركز  $\omega$  للدائرة ( $\Gamma$ ) منتصف القطعة ( $\Delta$ 

$$z_{\omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

3/ كتابة ،z على شكله الجبري :

$$z_{c} = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (٢) : يكفي أن نثبت

$$\omega C = \frac{AB}{2}$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 - 2i - i|}{2}$$
$$= \frac{|-4 - 3i|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}{2}$$
$$= \frac{5}{2}$$

$$\omega C = |z_c - z_\omega| = \left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-2\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

 $(\Gamma)$  نستنتج أن النقطة  $\Gamma$  تنتمي إلى الدائرة

 $M_0$  تكون النقطة M' صورة لنقطة M' تختلف عن  $M_0$  بالتشابه المباشر  $M_0$  الذي مركزه  $M_0$  إذا تحقق ما يلي :

نستنج أن العددين المركبين وي المركبين

و 
$$k(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$
 متساویین.

$$\frac{z'-z_0}{z-z_0}=k\times e^{i\theta} : 0$$

. 
$$z'-z_0=k\times e^{i\theta}(z-z_0)$$
 آي

نلاحظ أن لاحقة Mo كذلك تحقق هذه العلاقة.

ب/ التحويل  $\bf 5$  هو النشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي  ${\bf W}$  لاحقتها  ${\bf W}={\bf W}={\bf W}={\bf W}$  و نسبته  ${\bf W}={\bf W}={\bf W}={\bf W}={\bf W}$  .

#### النبرين 12

( بكالوريا علوم تجريبية 2009)

: کثیر حدود حیث P(Z)

و Z عدد مرکب 
$$P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

. 
$$P(Z)=0$$
 المعادلة  $C$  على المجموعة  $C$ 

. 
$$Z_2 = 1 - \sqrt{3} i$$
 ،  $Z_1 = 1 + i$  : نضع (2

أ/ أكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسى .

ب/ أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسى .

 $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  جر استنتج القيمة المضبوطة لكل من

 $. \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ 

3) n عدد طبيعي ، عين قيم n بحيث يكون العدد

. حقیقیا 
$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$$

 $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ ب/ أحسب قيمة العدد

### حل التعرين 12 :

کثیر حدود حیث: P(Z)

$$P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

$$\arg\left(\frac{Z_{1}}{Z_{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} , \quad \left|\frac{Z_{1}}{Z_{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} : \text{ang}$$

$$\frac{Z_{1}}{Z_{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \cdot \frac{7\pi}{12}} : \text{deg}$$

$$\frac{Z_{1}}{Z_{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + \frac{1 + \sqrt{3}}{4} i : \text{deg}$$

$$\frac{Z_{1}}{Z_{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] : \text{deg}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] : \text{deg}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] : \text{deg}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] : \text{deg}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} : \text{deg}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

 $\frac{7n}{12} = k$  ومنه :  $\frac{7n}{12} = k$  معناه : n من مضاعفات العدد 12 الن (7 و12 أوليان فيها بينها).

و کا عدد مرکب : P(Z) = 0 المعادلة C المعادلة C عدد مرکب : P(Z) = 0 المعادلة C المجموعة C المجموعة C المحادلة : C = 1 + i معناه : C معناه : C المحادث C

 $S = \left\{1 + i; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\right\}$ : ومنه حلول المعادلة  $Z_1 = 1 + i$  ومنه  $Z_1 = 1 + i$  على الشكل الأسى:  $Z_1 = 1 + i$  ومنه  $|Z_1| = \sqrt{2}$  ومنه  $|Z_1| = \sqrt{2}$  ومنه  $|Z_1| = \sqrt{2}$  ومنه  $Z_1 = \sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{4}}$ 

 $(\arg(Z_2) = \frac{-\pi}{3} |Z_2| = 2)$  ومنه  $Z_2 = 1 - \sqrt{3} i$ ومنه :  $Z_2 = 2.e^{-i.\frac{\pi}{3}}$ ب/ الشكل الجبري :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

$$(\arg(Z_1) = \frac{\pi}{4} , |Z_1| = \sqrt{2}) : \text{ which it } |Z_2| = 2)$$

$$exp(Z_2) = \frac{\pi}{3}, |Z_2| = 2)$$

$$AC^2 + BC^2 = 12$$
 و  $AB^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$ : لدينا  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  ومنه :  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  حسب نظرية فيتاغورث فإن المثلث  $ABC$  قائم في  $ABC$ 

$$|Z| = \left| \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} / \Rightarrow$$

$$|Z_C - Z_B| = \left| \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{12 \times 20} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} = \frac{1}{2^{228}} = \frac{1}{2^{28}} = \frac{1}$$

## ( بكالوريا علوم تجريبية 2009)

 $(o; \vec{i}; \vec{j})$  المسنوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  المعادلة : (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :  $Z^2 - 2Z + 4 = 0$ 

 $Z_2$  ،  $Z_1$  على هذه المعادلة .  $Z_2$  على الشكل الأسى .  $Z_2$  على الشكل الأسى .

ب C ، B ، A , A النقط من المستوى التي لواحقها على ،  $Z_B=1+i\sqrt{3}$  ،  $Z_A=1-i\sqrt{3}$  : الترثيب

$$Z_C = \frac{1}{2} \left( 5 + i\sqrt{3} \right)$$

 $(i^2 = -1)$  الغدد المركب الذي يحقق ا

أحسب الأطوال BC ، AC ، AB ثم استنتج طبيعة الثلث ABC .

ج/ جد الطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث:

$$Z = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$$

د/ أحسب  $Z^3$  و  $Z^6$  ثم استنتج أن  $Z^3$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي  $Z^3$  .

## حل النمرين 13 :

$$Z^{2} - 2Z + 4 = 0 (1)$$

$$\Delta' = (-1)^{2} - (1)(4) = -3 = (\sqrt{3}.i)^{2} :$$

$$Z_{1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1} = 1 - i\sqrt{3} :$$

$$Z_{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} = 1 + i\sqrt{3} :$$

#### الدريزة

### ( بكالوريا علوم تجريبية 2010)

نعتبر م م م م م  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  النقطتين A و B اللتين لاحقتيها على الترتيب  $z_A = 3i$  و  $z_A = 1 + i$  على الترتيب

.  $z_B$  و  $z_A$  : أكتب على الشكل الأسي

2. ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M

z' دات اللاحقة z' حيث M' دات اللاحقة

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر δ.

ب) عين  $z_C$  لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه  $z_C$ 

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. لتكن النقطة D مرجح الجملة {(A,2),(B,−2),(C,2)}.

. D عين  $z_D$  لاحقة النقطة

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي ABCD.

عن B وعن النقطة M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن A

zلاحقتها z ولتكن  $\Delta$  مجموعة النقط  $\Delta$  ذات اللاحقة D

التي يكون من أجلها  $\frac{z_B-z}{z_D-z}$  عددا حقيقياً موجبا تماما .

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة أن النقطة E تنتمي أن النقطة  $Z_E = 6 + 3i$ 

 $(\Delta)$  .

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب  $\frac{Z_B-Z}{Z_D-Z}$  عين عندئذ المجموعة  $(\Delta)$ .

#### حل التمريس 14

 $rg(z_A)=rac{\pi}{4}$  و بالتالي:  $|z_A|=\sqrt{2}$  و بالتالي:  $z_A=\sqrt{2}e^{irac{\pi}{4}}$  و بالتالي:  $z_A=\sqrt{2}e^{irac{\pi}{4}}$ 

$$z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$
 : بالتالي

$$|Z_A - Z_B| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$|Z| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

• 
$$arg(Z) = arg(Z_C - Z_B) - arg(Z_A - Z_B)$$

$$\arg(Z_C - Z_B) = \arg\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\arg(Z_A - Z_B) = \arg(-2i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$arg(Z) = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
:

. ( عدد صحیح k عدد صحیح

$$Z^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \left[\cos 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{8} \left[\cos \pi + i\sin \pi\right] = -\frac{1}{8}$$

$$Z^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \left[\cos 6 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{64} \left[\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right] = \frac{1}{64}$$

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \left[\cos 3k \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3k \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \left[\cos k\pi + i\sin k\pi\right]$$

$$Z^{3k}=-iggl(rac{1}{2}iggr)^{3k}$$
: إذا كان  $k$  فردي فإن

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$$
 و إذا كان:  $k$  زوجي فإن

arg(2i)نسبة التشابه المباشر هو 2=|2i| و زاويته هي (2i)أي  $\frac{\pi}{2}$  و مركزه هو النقط  $\omega$  التي لاحقتها  $\frac{\pi}{2}$  تعقق :  $\omega = B$  و منه  $z_0 = 2iz_0 + 6 + 3i$ ب) صورة النقطة A بالتشابه تحقق:

 $z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 4 + 5i$ 

ج) كيا أن C صورة A بالتشابه الذي مركزه  $B^{ullet}$  و زاويته ABC فهذا يعني أن المثلث ABC مثلث قائم في  $rac{\pi}{2}$  $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$  مرجح الجملة D مرجع الجملة أن D مرجع  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  فإن :  $\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ .  $z_D = 5 + 7i$  : أي  $z_D - z_A = z_C - z_B$ ب) في الرباعي  $\overrightarrow{ABCD}$  لدينا  $\overrightarrow{BC}$  و بالتالي فالرباعي متوازي أضلاع و بها أن ABC قائم في B فإن الرباعي ABCD مستطيل.

4. أ) لدينا  $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i}$  و هو عدد .  $E \in (\Delta)$  حقيقي موجب إذن

ب) عمدة العدد المركب  $\frac{z_B - z_E}{z_D - z}$  هو قيس الزاوية  $\cdot \left( \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB} \right)$ 

: لدينا بعد وضع z = x + iy نجد أن يا بعد وضع

 $x^2 - 5x > 0$  مع  $x \neq 5$  مع y = 3 تعني  $z_B - z \in R_+^*$  $[0,+\infty[$  أي  $]0,+\infty[$   $]0,\infty$  أي مجموعة النقط  $[\Delta]$  هي

S(5,3) تقاطع المستقيم ذي المعادلة y=3 باستثناء النقطة مع المجموعة  $]\infty+,5$   $[\,\cup\,]$   $0,\infty-[\,$  أي هي اتحاد نصفي

 $x \in ]-\infty,0[\cup]$ المستقيمين 3y = 3 مع

( بكالوريا علوم تجريبية 2010)

: المعادلة C المعادلة المركبة C المعادلة

ي، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي،  $z^2 - 6z + 18 = 0$ 

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (٥:٣:١٠) لعتبر النقط D,C,B, A لاحقاتها على الترتيب

 $z_D = -z_B$ ,  $z_C = -z_A$ ,  $z_B = -\bar{z}_A$ ,  $z_A = 3 + 3I$ ا) بين أن النقط D,C,B,A تنتمي إلى نفس الدائرة ذات

المركز () مبدأ المعلم .

ب) عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يجول النقطة B إلى النقطة /

D,O,B استقامية وكذلك النقط C,O,A استقامية د) استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

#### حل التمرين 15

 ميز المعادلة 0 = 18 + 6z + 6z مو 36 و بالتالي فالعدد 61 هو أحد جذري المميز و منه : للمعادلة حلين 3+3i , 3-3i LA

 $3+3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$   $3-3i = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 

Oا) لإثبات النقط  $D,C,B,\Lambda$  تنتمي إلى دائرة مركزها (2

 $OD = |z_D|$  : حيث OD = OC = OB = OA : نبين أن  $OA = |z_A|$   $OB = |z_B|$   $OC = |z_C|$  O

 $|z_C| = |-z_A| = |z_A|$  و  $|z_B| = |\overline{z}_A| = |z_A|$  لدينا:  $|z_D| = |-z_B| = |-\overline{z}_A| = |z_A|$ 

D,C,B,A أي أن النقط OD = OC = OB = OA

تنتمي إلى دائرة مركزها 0.

ب) زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B هي عمدة العدد المركب  $\frac{z_{H}}{z_{A}}$  أي  $\frac{3+3i}{-3-3i}$  أي -i و منه زاوية الدوران هي  $\frac{\pi}{2}$  – .

 $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = k\pi$  : النقط C, O, A استقامية تعني أن  $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = k\pi \text{ (s) } k \in \mathbb{Z}$  $\frac{z_A}{z_C} = \frac{3+3i}{-3-3i} = -1$ Let  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_R - Z_A} = \frac{-4 + i + i}{2 + 3i + i} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i}$  $= \frac{-2 + i}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i}$  $= \frac{-2 + 4i + i + 2}{5} = \frac{5i}{5} = i$ 

ب) تعيين طويلة وعمدة العدد المركب:

 $arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  بما أن : i = 1 و  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$  : بما أن :  $arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$  و  $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1$  : فإن: 1 = 1

- طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

را المميزة: z'=az+b التحويل z'=iz-1-i من الشكل z'=iz-1-i التحويل z'=iz-1-i من الشكل z'=iz-1-i التحويل z'=iz-1-i فإن z'=iz-1-i التحويل z'=iz-1-i و بالتالي z'=iz-1-i التحويل z'=iz-1-i هو الدوران الذي مركزه z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i هو النقطة z'=iz-i هو النقطة z'=iz-i هو النقطة z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i

: استقامية D, C, A استقامية (3) أ) إثبات أن النقط

 $\overrightarrow{AC}(-4,2)$ ،  $\overrightarrow{AD}(-6,3)$ : وعليه D(-6,2) الدينا  $\overrightarrow{AD}(-6,2)$  الدينا  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$  المتقامية أي  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$  المتقامية أي تعيين نسبة التحاكي  $\overrightarrow{A}$  الذي مركزه  $\overrightarrow{A}$  و يحول النقطة  $\overrightarrow{A}$  الذي مركزه  $\overrightarrow{A}$  و  $\overrightarrow{A}$  الفقطة  $\overrightarrow{A}$  الفقطة  $\overrightarrow{A}$   $\overrightarrow{A}$ 

$$Z_{C} - Z_{A} = -4 + i + i$$

$$= \frac{-6 + 3i}{-4 + 2i} = \frac{3(-2 + i)}{2(-2 + i)} = \frac{3}{2}$$

و منه  $T_c = -\pi$  استقامیة .  $T_c = -\pi$  الطریقة نبین استقامیة  $T_c = -\pi$  .  $T_c = -\pi$  .  $T_c = -\pi$  .  $T_c = -\pi$  المستقیم  $T_c = -\pi$  .  $T_c = -\pi$  المستقیم  $T_c = -\pi$  .  $T_c = -\pi$  استقامی  $T_c = -\pi$  .

فهها متقایسین و لدینا  $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = -rac{\pi}{2}$  فهذا یعنی أن ABCD مربع .

16

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس : النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب :  $z_C=-4+i$  و  $z_B=2+3i$  ،  $z_A=-i$   $z_C-z_A$  على الشكل الجبري العدد المركب  $z_A=-1$  (1) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $z_A=-1$ 

(1) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب (2C-2A) . (2D-2A) . (2D-2A) و عمدة له، ثم (2D-2A) و عمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث (2D-2A) .

نعتبر التحويل النقطي T في المستوى الذي يرفق بكل z' نعتبر التحويل النقطة M' ذات اللاحقة z'=iz-1-i

أ) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب) ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

.  $z_D = -6 + 2i$  لتكن D النقطة ذات اللاحقة (3

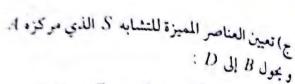
أ) بين أن النقاط D, C, A في استقامية.

Cب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة D إلى النقطة D .

ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

### حل التمريين 16 :

 $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$  أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب أ



: عليه 
$$Z_D - Z_A = a(Z_B - Z_A)$$
 و عليه  $a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-6 + 2i + i}{2 + 3i + i}$ 

$$= \frac{-6 + 3i}{2 + 4i} = \frac{3i(1 + 2i)}{2(1 + 2i)} = \frac{3}{2}i$$

$$\arg\left(\frac{3}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
 و  $|a| = \frac{3}{2}$ : ناه التشابه  $S$  مرکزه  $A$  و نسبته  $\frac{3}{2}$  وزاویته  $S$ 

## (بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس التي لاحقاتها على الترتيب:  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  التي الترتيب:  $z_C = 4i$  ,  $z_B = 3 + 2i$  ,  $z_A = 3 - 2i$ 1) أ) علم النقط C, B, A) علم النقط

ب) ما طبيعة الرباعي OABC ؟ علَّل إجابتك. ج) عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي OABC. 2) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي  $|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 12$ 3) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات

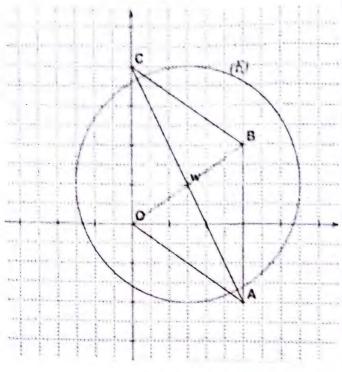
 $z_1, z_0$  نسمي  $z^2 - 6z + 13 = 0$ : image  $z_1, z_0$ حلى هذه المعادلة.

ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب ت. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z-z_0| = |z-z_1|$$

## حل النمرين 17

1) أ) تعليم النقاط:



#### ب) تعيين طبيعة الرباعي OABC:

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_O} = \frac{3 + 2i - 4i}{3 - 2i} = \frac{3 - 2i}{3 - 2i} = 1 : \text{if } i = 1$$

فإن:  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$  و عليه الرباعي  $\overrightarrow{OABC}$  متوازي أضلاع.

تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC:

$$Z_{\Omega} = \frac{Z_B + Z_O}{2} = \frac{3 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

$$Z_{\Omega} = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

(E) تعيين و إنشاء المجموعة (E

(
$$E$$
) بجموعة النقط  $M$  من المستوي التي تحقق :

$$||\overline{MO} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|| = 12$$

: بها أن  $\Omega$  مركز الرباعي OABC يعني أن

$$\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{O}$$

$$|MO + MA + MB + MC| = 12$$
 نان: 12

 $M\Omega = 3$  :  $\sqrt{4M\Omega} = 12$ 

و بالتالي (E) دائرة مركزها  $\Omega$  و نصف قطرها E.

### حل التمرين 18

(1) حل في  $\Im$  مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات  $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0....(1)$  المجهول z النالية:  $(1) - (2\cos\alpha)z + 4 = 0...(1)$  المجهول z النالية:  $(2\cos\alpha)^2 - (1)(4) = 4\cos^2 x - 4$   $= 4(\cos^2 x - 1) = 4(-\sin^2 x) = (2i\sin x)^2$  ومنه حلول المعادلة هي:

$$z' = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha \ z' = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$$

$$z_{1} = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 - i\sqrt{3} \quad : 2i\sin\alpha$$

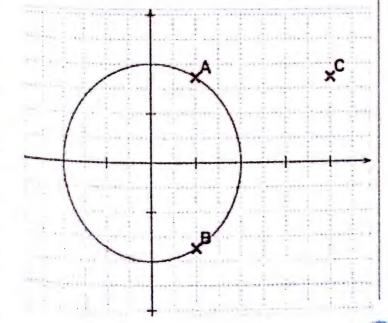
$$z_{2} = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_{1}}{z_{2}}\right| = \left|\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \cos\left(\frac{-2\pi \times 2013}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi \times 2013}{3}\right)$$
$$= \cos(1342\pi) - i\sin(1342\pi) = 1$$



3) أ) حل المعادلة ذات المجهول 2 :

$$\Delta = (-6)^2 - 4(13) = -16$$
: تعني:  $Z^2 - 6Z + 13 = 0$   
 $Z^2 - 6Z + 13 = 0$   
أي:  $\Delta = (4i)^2$  و عليه المعادلة تقبل حلين هما :  
 $Z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$  و  $Z_0 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$ 

ب) تعيين مجموعة النقط 
$$M$$
 من المستوي التي تحقق : 
$$|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$$

AM = BM : تعني أن  $|Z - Z_0| = |Z - Z_1|$  و بالتالي مجموعة النقط M هي محور القطعة [AB] أي محور الفواصل.

## ( بكالوريا علوم تجريبية 2013)

 حل في € مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0....(1)$$

$$z_1$$
 برمز إلى حلي المعادلة (1) بـ  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  من أجل

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1 : نان : z_2$$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم نتعامد

ومتجانس 
$$C$$
 ،  $B$  ،  $A$  النقط  $C$  ،  $B$  ،  $C$  التي لاحقاتها:  $z_C = 4 + i\sqrt{3}$  و  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$  و  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$  عمل الله تسم

i) أنشئ النقط C ، B ، A .

 $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ب) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب ا $z_B-z_A$  ثم إستنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر C الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج) عين لاحقة النقطة G مرجع الجملة ((د.ع) (د. 1) (د. 1)

. G نم انشى {(A;1),(B;-1),(C;2)}

د) أحسب  $z_D$  لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDG متوازي أضلاع.

) أنشئ النقط C ، B ، A انشئ

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$
 ب/ كتابة على الشكل الجبري العدد المركب

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر C الذي

مرکزه A ویطلب تعیین نسبته وزاویته: 
$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} (z_B - z_A)$$
 ومنه  $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 

$$S(M) = M'$$
 و  $z_M - z_A = a(z_M, -z_A)$  : أي من الشكل

$$|\arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}i |a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
ويا آن:

A وعلیه S تشابه مباشر مرکزه

$$|a| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
ونسبته

$$\theta = \arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$$
وزاویته:

: مرجح الجملة G مرجح الجملة G

$$\{(A;1),(B;-1);(C;2)\}$$

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

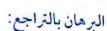
د) أحساب  $z_D$  لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي

ABCD متوازي أضلاع:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$$
 متوازي أضلاع معناه:  $\overrightarrow{ABDG}$ 

$$z_D = z_G + (z_B - z_A) = 4$$
 ومنه  $z_B - z_A = (z_D - z_G)$ 

# المتتاليات العددية



مبدأ الإستدلال بالتراجع: لتكن P(n) خاصية متعلقة بمتغير طبيعي n و n عدد طبيعي معلوم. للبرهان على صحة P(n) من أجل كل عدد طبيعي n حيث  $n \geq n_0$  نتبع الخطوات الآتية:

 $n = n_0$  من أجل P(n) من أجل (1) نتأكد من صحة الخاصية

2) نفرض الخاصية P(n) صحيحة من أجل عدد طبيعي p(n+1) كيفي p(n+1) .

إذا تحققت الخطوتين (1) و (2) فإن الخاصية P(n) تكون صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث  $n \ge n$ .

### Engilden 11

 $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر المجموع  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ 

- $.S_{5}, S_{2}$  ----- (1
- .  $S_n$  عين عبارة  $S_{n+1}$  بدلالة (2
- $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$  فإن:  $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$

#### وراحال

 $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ,  $S_2 = 1 + 2 = 3$  (1)

 $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) (2$ 

 $S_{n+1} = S_n + (n+1)$ :

 $n \in N^*$  البرهان بالتراجع أنه من أجل (3

 $: S_n = \frac{n^2 + n}{2} \text{ if }$ 

أ) نتحقق من الخاصية من أجل n = 1 : لدينا :

(إذن الخاصية من أجل  $S_1 = 1$  و  $S_1 = 1$  (إذن الخاصية من أجل  $S_1 = 1$ 

ب) نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن من

أجل الرتبة 1+n:

 $S_n = \frac{n^2 + n}{2} : \text{id}_{n} = \frac{n^2 + n}{2}$ 

 $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$ : ونبرهن أن:

 $S_{n+1} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ 

 $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n^2 + n}{2} + (n+1)$  لدينا:  $n^2 + n + 2(n+1) - n(n+1) + 2(n+1)$ 

 $=\frac{n^2+n+2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$ 

 $=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$ 

.  $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$  فإن  $n \in N^*$ 

### الدرون المالية في المالية

 $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ : is in the same is same in the s

. S3, S2, S1 - (1

عبر عن  $S_{n+1}$  بدلالة  $S_n$  ثم برهن بالتراجع أنه من  $S_n = n^2$  أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

 $\frac{1}{6} \times 0(2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 0$ من جهة لدينا: 0 = (2 × 0 + 3 × 0 + 1) من جهة ثانية الدينا: 0 = (2 × 0 + 3 × 0 + 1)

ومن جهة ثانية لدينا :  $S_0=0^2=0^2$  ومنه الخاصية (P) محققة من أجل P

n بنفرض الخاصية (P) محققة من أجل الرتبة  $S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)....(P)$  : ونبر هن عليها من أجل الرتبة n+1 أي نبر هن ان:

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{13}{6}n^2 + 3n + 1$$

لدينا:

$$S_{n+1} = 1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} + (n+1)^{2} = S_{n} + (n+1)^{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + (n+1)^{2} + (n+1)^{2$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)....(P)$$

## تذكير حول المتتاليات العددية:

1) تعريف: نسمي متتالية عددية، كل دالة لمجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء منها في مجموعة الأعداد الحقيقية.

نرمز لمتتالية عددية برموز من الشكل: (٣٫١) ١٠ (١٠٨) . الخ.

2) اتجاه تغير متتالية عددية:

يعرف اتجاه تغير متتالية  $(u_n)$  بدراسة إشارة الفرق  $u_{n+1}-u_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $u_n$ . و عليه تكون المتتالية العددية  $(u_n)$  :

## Will !

 $S_2 = 1 + 3 = 4$   $S_1 = 1$   $S_3$ ,  $S_2$ ,  $S_3$   $S_4$   $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$ 

۲) والتعبير عن ٥٠٠١ بدلالة عن ٥٠٠١ بدلالة عن ١٠٠٠

 $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1)$ =  $S_n + 2n + 1$ 

n البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $S_n = n^2$  فإن  $(P_n)$ 

: n=1 من أجل ( $P_n$ ) من أجل  $\bullet$ 

. لدينا:  $S_1 = 1^2$  أي : I = 1 وهذا صحيح

n نفرض الخاصية  $(P_n)$  صحيحة من أجل الرتبة  $lacksymbol{\circ}$ 

n+1 ونبرهن عليها من أجل الرتبة  $S_n = n^2$ : أي

 $S_{n+1} = (n+1)^2$  : أي نبر هن أن:

 $S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$  ندينا  $S_n = n^2$  زمنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

### 16 yellow fraget

 $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ : علد طبيعي ، نضع n

 $.S_{2}.S_{5}$  . (1

: n نون بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :  $S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)$ 

### शिख्य

 $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5 : S_2 \cdot S_5$   $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5 : S_2 \cdot S_5$ 

 $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ 

 $^{(2)}$  البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :  $S_n = \frac{1}{6} n(2n^2 + 3n + 1)....(P)$ 

n=0 من أجل (P) من أجل:

 $u_{n+1} - u_n > 0$ :متزایدة تماما إذا كان من أجل كل n فإن  $(u_n)$ 

 $u_{n+1}-u_n<0$  متناقصة تماما إذا كان من أجل كل n فإن  $(u_n)$ 

 $u_{n+1}-u_n=0$  : ثابتة إذا كان من أجل كل n فإن ( $u_n$ )

3) المتتالية المحدودة من الأعلى:

عدودة من الأعلى إذا كان من أجل كل n فإنه بوجد  $(u_n)$ 

.  $u_n \leq A$  : عدد حقیقي ثابت A بحیث تکون

المتتالية المحدودة من الأسفل:

 $(u_n)$  محدودة من الأسفل إذا كان من أجل كل n فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت A بحيث تكون  $u_n \ge A$ .

4) المتالية المتقاربة:

نعریف 01: إذا كانت المتنالیة معرفة بحدها العام  $u_n$ و كانت:

 $(u_n)$  حيث  $u_n = l$  عدد حقيقي ثابت فإن المتتالية  $u_n = l$  تكون متقاربة .

تعريف 02: إذا كانت  $(u_n)$  محدودة من الأعلى و متزايدة أو إذا كانت  $(u_n)$  محدودة من الأسفل و متناقصة فإن المتتالية  $(u_n)$  تكون متقاربة.

A عدودة بالعدد  $(u_n)$  عدودة بالعدد  $u_n$  ملاحظة  $(u_n)$  عدودة بالعدد  $u_n$  مكن دراسة إشارة الفرق  $u_n$  - A ، أو نبرهن بالتراجع ، و إذا كانت  $u_n = f(n)$  ندرس تغيرات الدالة f على  $[0,+\infty]$   $[0,+\infty]$  [0,+

السالية المناسية

 $a \times c = b^{\circ}$ 

 $u_n = u_n \times q^n$   $v_n = u_n + r$   $v_n = u_n \times q^n$   $v_n = u_n + r$   $v_n = u_n \times q^n$   $v_n$ 

6) نهاية متتالية هندسية:

a+c=2b

خاصبة ثلاث حدود متتابعة

( $u_n$ ) متتالية هندسية حدها الأول $u_0$  وأساسها q حدها العام:

 $\lim_{n\to +\infty} u_n = \infty$  : فإن  $u_0 \neq 0$  و q>1 إذا كان q>1 إذا كان وتكون المتتالية  $(u_n)$  متباعدة.

و الناكان: q=1 فإن المتالية  $(u_n)$  نكون ثابتة  $\lim_{n\to\infty}u_n=u_0$ 

(3) إذا كان: 1 < q < 1 فإن:  $0 = \lim_{n \to \infty} u_n = 0$  وتكون المتالية  $(u_n)$  متقاربة.

4) إذا كان:  $q \le -1$  فإن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة وليست لها نهاية .

7) المتتاليتان المتجاورتان:

: متتالیتان متجاورتان إذا تحقق ما یلی  $(v_n)$  و  $(u_n)$ 

متزایدة و  $\left(v_{n}\right)$  متزایدة ( $u_{n}$ ) متزایدة

 $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$  (2

نظریة: إذا کانت  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان فإن :

حيث a عدد حقيقي ثابت  $\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = a$ 

التمثيل البياني لحدود متنالية المعرفة بالعلاقة التراجع  $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ 

 $(u_n)$ التمثيل البياني للدالة fالمرفقة بالمتتالية  $(C_f)$  ننشئ  $(C_f)$  التمثيل البياني  $M(u_n;u_{n+1})$  هي نقاط من  $(C_f)$ .

. y = x ننشئ المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته (2

.  $M_0(u_0; u_1)$  نعين أول نقطة (3

نسقط  $M_0(u_0;u_1)$  على  $M_0(u_0;u_1)$  فنحصل على نقطة  $A_0$  .

ونق (Oy) فنحصل على النقطة ( $A_0$  على  $(C_f)$  ونق  $(M_1(u_1;u_2)$ 

وهكذا نكرر العملية فنحصل على جميع النقاط :  $M_3(u_2;u_3), M_2(u_2;u_3)$ 

# تمارين

### العرين 0.1

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} + (n+1)^{2} :$$

$$= \left(\frac{1}{6}n(2n^{2} + 3n + 1)\right) + (n+1)^{2}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + (n+1)^{2}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + n^{2} + 2n + 1$$

$$= \frac{1}{3}n^{3} + \frac{13}{6}n^{2} + 3n + 1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي 11 فإن :

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} = \frac{1}{6}n(2n^{2} + 3n + 1)$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$P(n)...... 03 + 13 + 23 + ... + n3 = \frac{n2(n+1)2}{4}$$

: n = 0 من أجل P(n) من أجل •

$$0^3 = \frac{0^2 (0+1)^2}{4}$$

n=0 ومنه الخاصية P(n) محققة من أجل 0=0

• نفرض أن من أجل الرتبة n أي:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

ونبرهن أن:

$$0^{3}+1^{3}+2^{3}+...+n^{3}+\left(n+1\right)^{3}=\frac{\left(n+1\right)^{2}\left(n+1+1\right)^{2}}{4}$$

لدينا:

$$0^{3}+1^{3}+2^{3}+...+n^{3}+\left(n+1\right)^{3}=\frac{n^{2}\left(n+1\right)^{2}}{4}+\left(n+1\right)^{3}$$

### حل التعرين 01 :

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)..(P)$ • نتحقق من الخاصية (P) من أجل (P): من جهة لدينا:  $(P) \times (2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 0$ •  $(2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 0$ 

. n=0 ومنه الخاصية (P) محققة من أجل

: in in identity is a satisfactory is a satisfactory is a satisfactory is a satisfactory in the satisfactory is a satisfactory in the satisfactor

 $=\frac{1}{3}n^3 + \frac{13}{6}n^2 + 3n + 1$ 

#### النبرين 02

ومن أجل كل عدد طبيعي  $u_0$ = 2 ومن أجل كل عدد طبيعي  $u_n$  متتالية معرفة ب $u_{n+1}=2u_n-3$ 

$$u_5; u_4; u_3; u_2; u_1 + 1$$
 (1

- 2) أحسب $u_0$  و  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_2$  و  $u_3$  و  $u_4$  أعط تخمينا حول عبارة  $u_n$  بدلالة  $u_3$  ثم برهن صحتها بالتراجع.
  - n استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة (3

#### حل التمريين 02:

 $u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$  (1  $u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$   $u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$   $u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$   $u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$   $3 - u_0 = 3 - 2 = 1 = 2^0$  : الدينا (2  $3 - u_1 = 3 - 1 = 2 = 2^1$   $3 - u_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$   $3 - u_3 = 3 + 5 = 8 = 2^3$   $3 - u_4 = 3 + 13 = 16 = 2^4$  $3 - u_5 = 3 + 29 = 32 = 2^5$ 

نستنتج أن:  $u_n = 2^n$  ولنبرهن هذه الخاصية بالتراجع:  $u_n = 2^n$  لأن:  $u_0 = 2^0$  لأن:  $u_0 = 2^0$  أي:  $u_0 = 2^0$ 

نفرض أن  $u_n = 2^n$  من أجل الرتبة n ونبرهن على صحة الخاصية من أجل الرتبة n+1 أي نبرهن أن:

$$3 - u_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$3-u_{n+1} = 3 - (2u_n - 3) = 6 - 2u_n$$
 لدينا:  
=  $2(3-u_n) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ 

لأن حسب فرضية التراجع

$$0^{3} + 1^{3} + 2^{3} + \dots + n^{3} = \frac{n^{2} (n+1)^{2}}{4}$$

$$0^{3} + 1^{3} + \dots + n^{3} + (n+1)^{3} : \forall i \leq 0$$

$$= \frac{n^{2} (n+1)^{2}}{4} + (n+1)(n+1)^{2}$$

$$= (n+1)^{2} \left(\frac{n^{2}}{4} + n + 1\right)$$

$$= (n+1)^{2} \frac{n^{2} + 4n + 4}{4} = (n+1)^{2} \frac{(n+2)^{2}}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^{2} (n+1+1)^{2}}{4}$$

n+1 إذن: الخاصية محققة من أجل

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$10^{3} + 1^{3} + 2^{3} + ... + n^{3} = \frac{n^{2} (n+1)^{2}}{4}$$

3) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
 : as  $n = \frac{1}{3}$ 

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(2)(3) = 2$$
 لدينا  $n=1$  لدينا  $n=1$ 

$$n=1$$
 إذن: الخاصية محققة من أجل  $t_1=2$ 

$$n$$
ا من أجل  $t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$  من أجل ا

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$
 هل

لدينا:

$$t_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$$

$$=t_n+(n+1)(n+2)$$

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
: حسب الفرضية لدينا

$$t_{n+1} = (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$

نستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

 $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20} : e^{-1} \cdot (4)$   $S = \frac{20 - 0 + 1}{2} \cdot (u_0 + u_{20}) = \frac{21}{2} (-3 + 37) = 357$   $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n : e^{-1} \cdot (5)$   $S_n = \frac{n - 0 + 1}{2} \cdot (u_0 + u_n)$   $= \frac{n + 1}{2} (-3 + -3 + 2n)$  = (n + 1)(-3 + n)

#### النمرين 04):

: متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث  $(u_n)_{n \in N}$   $u_3 + u_5 = 20$  و  $u_1 = 1$  . أو جد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها .

 $u_1 + u_2 \dots u_n$ : المجموع المجموع (2) أحسب بدلالة  $(v_n)$  المعرفة كما يلي  $v_n = 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$ 

 $u_1^2 + u_2^2 \dots + u_n^2$  (3) أحسب بدلالة n المجموع  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  غم أحسب المجموع  $S_n$  حيث  $S_n$ 

#### حل التمرين 04

 $(u_n)$  إيجاد أساس المتتالية  $(u_n)$ 

#### 103 mail

 $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  و أساسها r ، حدها الرابع يساوى x و حدها الحامس يساوي x .

- (1) أوجد الأساس r و حدها الأول (1)
- 2) أكتب عبارة الحد العام "" بدلالة " .
- 3) على العدد 37 حدا من حدود المتتالية ("") ، إذا كان حداما رتبته.

 $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$  (4)

 $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ : 5)  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ; 4.  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 

### حل النمرين 03

 $^{1}$ ا المحاد الأساس  $^{1}$  و حدها الأول  $^{1}$ 

لدينا : حدها الرابع يساوى 3 معناه :  $u_3=3$  و حدها الخامس يساوي 5 معناه :  $u_4=5$  .

. ونعلم أن :  $u_4 = u_3 + r$  لأن  $u_n$  متتالية حسابية

 $r = u_4 - u_3 = 5 - 3 = 2$ :  $\omega_3$ 

 $3 = u_0 + 6$ : ولدينا  $u_3 = u_0 + 3.r$  ولدينا

 $u_0 = -3$ 

 $u_n = u_0 + n.r : n$  عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $u_n = u_0 + n.r : n$ 

 $u_n = -3 + 2n : \omega_2$ 

-3+2n=37 نضع:  $u_n=37$  ومنه n=20

ومنه: القيمة 37 حدا من حدود المتتالية (١١) حيث

21 ورتبته  $u_{20} = 37$ 

ومنه: q=2 ومنه q=2 لأن:  $(u_n)$  متتالية هندسية حدودها موجبة).

وتحدید انجاه تغیر المتتالیة  $(u_n)$ : بها أن  $(u_n)$  متتالیة هندسیة حدودها موجبة و q=2>1 فإن  $(u_n)$  متزایدة.

 $: u_1 + u_2 \dots u_n : u_n + u_2$  (2) حساب بدلالة n المجموع

$$u_1 + u_2 + \dots = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

 $u_1^2 + u_2^2 + u_n^2 + u_n^2$  حساب بدلالة n المجموع  $S_n$  حساب بدلالة (3

$$u_1^2 + u_2^2 + u_n^2 = u_1^2 + (u_1 q)^2 + (u_1 q)^2 + \dots + (u_1 q^{n-1})^2$$

$$= u_1^2 \left( 1 + \left( q^2 \right)^1 + \left( q^2 \right)^2 + \dots \left( q^2 \right)^{n-1} \right) = u_1^2 \left[ \frac{\left( q^2 \right)^n - 1}{q^2 - 1} \right] = \frac{4^n - 1}{3}$$

 $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  حساب المجموع  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  و  $v_n = 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$ 

$$S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$$
  
=  $(3 \cdot u_1^2 + 2 \cdot 3^1) + (3 \cdot u_2^2 + 2 \cdot 3^2)$   
+  $... \cdot 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$ 

$$=3\left(u_1^2 + u_2^2 \dots + u_n^2\right) + 2\left(3^1 + 3^2 + \dots + 3^n\right)$$
$$=4^n - 1 + 2\frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 4^n + 3^{n-1} - 2$$

الدوين 05

: کما یلي N متتالیة عددیة معرفة علی N کما یلي  $(u_n)$ 

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$
,  $u_0 = 0$ 

1) أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

. متزايدة تماما متزايدة معاما  $(u_n)$  متزايدة تماما  $0 \le u_n \le 1$ 

 $v_n = u_n - 1$ : لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على N كما يلي (2  $v_n = u_n - 1$ ) لتكن المتتالية هندسية .

 $_{n}$  عبر عن  $_{n}$  بدلالة  $_{n}$  ثم  $_{n}$  بدلالة  $_{n}$ 

ج/ o عين نهاية <sub>n</sub> اا و ،١٠

(3) أحسب بدلالة n المجموعين:  $Y_n$  و  $N_n$  حيث:  $N_n = V_n + U_n + U_$ 

#### حل التمرين 05

n البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :  $0 \le u_n \le 1$ 

: n = 0 نتحقق من الخاصية من أجل •

. وهذا محقق  $0 \le 0 \le 1$  أي  $0 \le u_0 \le 1$ 

• نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن على صحتها من أجل الرتبة n+1:

 $0 \le u_{n+1} \le 1$  أي نفرض أن  $0 \le u_n \le 1$  ونبر هن أن  $0 \le u_n \le 1$  لدينا  $0 \le u_n \le 1$  ( نضرب المتباينة المضاعفة بالعدد  $u_n \le 1$  نحصل على:  $u_n \le 1$  ( نضيف للمتباينة المضاعفة العدد  $u_n \le 1$  )

 $rac{1}{3} \leq rac{2}{3} u_n + rac{1}{3} \leq 1$  : نحصل على :  $0 \leq rac{1}{3}$  ناعلم أن  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  : ومنه :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  : ومنه :

2) إثبات أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - u_n$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)u_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(u_n - 1)$$

 $u_n-1 \le 0$  : وبها أن :  $u_n \le 1$  ( من السؤال 2 ) ومنه

 $u_{n+1} - u_n \ge 0$ :  $\frac{-1}{3}(u_n - 1) \ge 0$ :  $0 \ge 0$ 

 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left[ -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right] = 1 \cdot (|q| \le 1)$ 

 $S_n \circ Y_n : M_n : M_n \circ (6)$ 

$$Y_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
: لدينا

$$=-1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = -3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1)$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_n + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= Y_n + n + 1$$

#### 06

متتالیة معرفة علی N بـ :  $u_0 = 1$  و من اجل کل عدد  $(u_n)$ 

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} : n$$

 $u_{2}, u_{1} + 1$ 

nعدد حقیقی غیر معدوم،من اجل کل عدد طبیعی lpha -2

 $v_n = u_n + \alpha$ : نضع

( $v_n$ ) عين قيمة العدد lpha التي تكون من اجلها المتتالية (lpha

مندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ 

ب أعبر عن "نا بدلالة أ.

 $(u_n)$  ادرس اتجاه تغیر المتتالیة ا

4- أ) أحسب بدلالة n المجموع S حيث:

 $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ 

ب) استنتج  $\frac{S_n}{n}$  بستنتج (ب

اي:  $(u_n)$  متزايدة تماما.

 $\lim_{n\to+\infty}u_n=L: \text{ in all the following } 1$ 

(حيث L عدد حقيقي ثابت )

 $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = L$ : لدينا ( $(u_n)$ ) ايجاد نهاية المتتالية

$$L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}$$
:

L=1:  $\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}L:$   $\frac{1}{3}=\frac{2}{3}L-L$ 

$$S_n = -3 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] + n + 1 : a_n$$

5) لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كها يلي: من أجل كل عدد

$$v_n = u_n - 1 : n$$

• إثبات أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب أساسها و حدها الأول:

 $v_{n+1} = v_n \times q$  : متالية هندسية إذا تحقق ما يلي متالية هندسية

(q) عدد حقیقی ثابت)

 $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1$  Levil:

$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$$

.  $q=rac{2}{3}$  : ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها

.  $v_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$  وحدها الأول

: n عبارة  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة •

 $v_n = v_0 q^n$  : باأن ( $v_n$ ) متتالية هندسية فإن

$$v_n = -1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
:

 $u_n = v_n + 1$  : ولدينا  $v_n = u_n - 1$  : ولدينا

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 : \emptyset$$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}-\left(\frac{2}{3}\right)^n=0:v_n$$
  $u_n$   $u_n$   $u_n$ 

### حل التمرين 06:

$$u_2 = \frac{u_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$
  $u_1 = \frac{u_0 - 1}{2} = 0$  (1)

: نضع 
$$n$$
 نضع ،  $\alpha \neq 0$  (2) عدد طبیعي  $\alpha \neq 0$ 

$$v_n = u_n + \alpha$$

أ) قيمة 
$$\alpha$$
 التي تكون من اجلها المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$$
 alies  $\frac{1}{2}$  [w] aikun  $(v_n)$ 

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{u_n - 1}{2} + \alpha = \frac{u_n - 1 + 2\alpha}{2}$$

تكون 
$$(v_n)$$
 مندسية أساسها تكون  $v_{n+1} = \frac{u_n + \alpha + (\alpha - 1)}{2}$ 

$$lpha=1$$
 إذا و فقط إذا كان  $lpha-1=0$  أي  $rac{1}{2}$   $v_n=v_0q^n=2\Big(rac{1}{2}\Big)^n$  أن علم أن  $u_n=v_0q^n=2\Big(rac{1}{2}\Big)^n$  بدلالة  $n$ 

$$v_0 = u_0 + 1 = 2$$

$$u_n = v_n - 1$$
 نان  $v_n = u_n + 1$  ناب

$$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

#### (3) انجاء تغير (<sub>ال</sub>ا):

$$u_{n+1} - u_n = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) - \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

N ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n : s_n$$
 (1-4

$$s_n = (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)$$
 stee

$$s_n = v_0 \times \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1(n+1)$$

$$s_n = -4 \times \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] - 1(n+1)$$

# $s_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n + 3$ equal $s_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$
و  $-1 < q < 1$  کن 
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{n} = -1$$

#### العمرين 07

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases} : -N \text{ i.e. } N \text{ i.e.$$

المتالية ثابتة. 
$$(u_n)$$
 عين العدد الحقيقي  $a$  بحيث تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة.  $(D;\vec{i};\vec{j})$  المستقيم بعادلته  $y=x$  و المنحنى  $(D)$  الممثل للدالة  $(\Delta)$ 

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$
 المعرفة على  $R$ ب.

ج) نضع : 
$$a=0$$
 باستعمال الرسم السابق مثل على حامل عور الفواصل و بدون حساب الحدود  $u_3$ ,  $u_2$ ,  $u_1$ ,  $u_0$  و بدون حساب الحدود  $v_n=u_n-2$ :  $-2$  نعتبر المتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $N$  بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عبر عن 
$$v_n$$
 بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  ج) بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

: حيث 
$$L_n = S_n$$
 المجموعين  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  المجموعين  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  ب أحسب الجداء  $P = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_9$  : حيث  $P = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_9$ 

#### حل التمرين 07:

$$u_{n+1} = u_n = \dots = u_1 \neq u_0$$
 متتالية ثابتة معناه  $(u_n)$  (أ (1  $u_0 = \frac{-1}{2}u_0 + 3$  تكافئ  $u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n + 3$   $u_0 = 2 = a$  ومنه  $u_0 = 2 = a$  با رسم  $u_0 = x = 0$  الممثل للدالة  $u_0 = x = 0$  على  $u_0 = x = 0$  عل

#### المتتاليات العدديت

$$s_n = (-2) \times \frac{(-1)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1}$$
 axis

$$s_n = \frac{4}{3} \times \left[ \left( \frac{-1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right]$$

 $L_n = u_0 + u_1 + .... + u_n$ : حيث n بدلالة n بدلالة n

$$L_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$

$$L_n = \frac{4}{3} \times \left[ \left( \frac{-1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] + 2n + 2$$
 if  $L_n = S_n + 2(n+1)$ 

$$L_n = \frac{4}{3} \times \left[ \left( \frac{-1}{2} \right)^{n+1} \right] + 2n + \frac{2}{3} \quad \text{and} \quad$$

 $P = v_0 \times v_0 q \times \dots \times v_0 q^9$  : حيث  $P = v_0 \times v_0 q \times \dots \times v_0 q^9$ 

$$0+1+2+....+9$$
)  $P=v_0^{10}q^{0+1+2+.....+9}$ 

مج متتالية حسابية) .

$$P = (-2)^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^{45}$$

$$P = (-2)^{10} (-)^{-45} = (-2)^{-35}$$
 each

#### التمرين 08:

: بالعبارة  $I=\left[1;4\right]$  بالعبارة نعتبر الدالة f بالعبارة

$$f(x) = \frac{6x - 4}{x + 1}$$

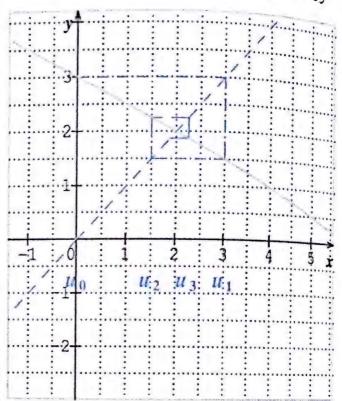
ادرس تغیرات الدالة f و استنتج آنه من اجل كل عدد -1

.  $f(x) \in I$  فان x من المجال ا

: نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على N كمايلي

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

ج) نضع :  $u_0 = 0$  الحدود  $u_0 = u_1, u_2, u_3, u_2, u_3$  و  $u_0 = 0$  على حامل عور الفواصل ·



 $v_n = u_n - 2$  : نعتبر (2

$$v_{n+1} = qv_n$$
 متتالية هندسية معناه ( $v_n$ ) (أ

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$$

$$v_0 = u_0 - 2 = -2$$
  $q = -\frac{1}{2}$ 

$$v_n = v_0 \times q^n$$
 ب بدلالة  $v_n = v_0 \times q^n$  با أن

$$v_n = -2 \times (\frac{-1}{2})^n$$
 فان

 $u_n = v_n + 2$  فان  $v_n = u_n - 2$  فان : n بدلالة  $u_n$ 

$$u_n = -2 \times (\frac{-1}{2})^n + 2$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+2:$$
 جا منقاربة

$$\lim_{n \to +\infty} \left( -\frac{1}{2} \right)^n = 0$$
,  $-1 < q < 1$ 

$$s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
: حيث  $n = n$  بدلالة  $n$  بدلالة  $n$  بدلالة  $n$ 

أ) باستعمال ( $C_{j}$ ) منحني الدالة f والمستقيم (D) ذو المعادلة ي مثل على محور الفواصل الحدود  $u_1, u_1, u_2, u_3$  ( دون y = x

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u<sub>n</sub>).

(ب) كبر هن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

 $1 \le u_n \le 4$ 

ج) بين أن  $(u_n)$  متزايدة تماما استنتج أنها متقاربة .

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$$
: - نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة  $N$  بـ : -3

أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

 $u_n$  بدلالة  $u_n$  بدلالة  $u_n$  بدلالة  $v_n$  بدلالة

جـ) عبر بدلالة بدلالة 
$$n$$
 عن المجموع  $S_n$  حيث:

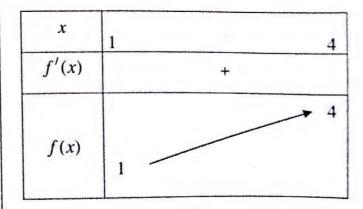
$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

#### حل التمرين 08 :

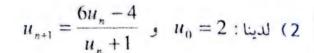
1) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال I و لدينا :

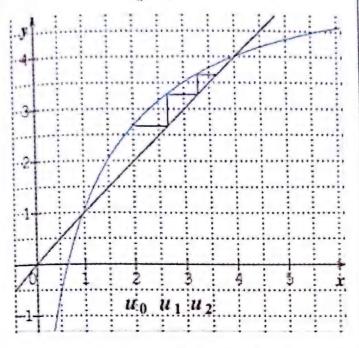
$$f'(x) = \frac{6+4}{(x+1)^2} = \frac{10}{(x+1)^2}$$

Iبيا أن f'(x) > 0 فان الدالة f متزايدة تماما على المجال و لدينا :



من جدول تغيرات الدالة f ستنتج انه من اجل كل عدد  $f(x) \in I$  فان المجال من المجال ا





. التخمين :  $(u_n)$  متتالية متزايدة تماما .

: n البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي : n $1 \le u_n \le 4$ 

 $1 \le 2 \le 4$  من اجل  $1 \le u_0 \le 4$  n = 0 من اجل

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n + 1}$$
: جر  $(u_n)$  متزایدة تماما  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1}$  أي

$$u_{n} + 1$$
 $u_{n} + 1 = 0$ 
 $u_{n} + 1 = 0$ 

$$u_n - 1 \ge 0$$
 بيا أن  $0 \le 1 - 4 \le 0$  و

فإن:
$$0 \le \frac{-(u_n-1)(u_n-4)}{u_n+1}$$
 وبالتالي ( $u_n$ ) متزايدة غاما.

بها أن  $(u_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

معناه q معناه مندسیة أساسها q معناه ( $v_n$ ) أ

$$v_{n+1} = \frac{2u_4 - 8}{\frac{u_n + 1}{5u_n - 5}} = \frac{2}{5}v_n \le v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{6u_4 - 4}{u_n + 1} - 4}{\frac{6u_n - 4}{u_n + 1} - 1}$$

$$q = \frac{2}{5}$$
 ومنه  $(v_n)$  م هـ أساسها  $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 1} = -2$ 

$$v_0 = -2$$
 و حدها الأول

$$3276 = 78(a-b+c)$$
 : أي:  $a-b+c = 3276/78$  أي:  $a-b+c = 3276/78$   $a+b+c = 78.....(1)$  لدينا إذن الجملة  $a-b+c = 42.....(2)$ 

b=18 : a=36 : a=18 أساس هذه المتتالية الهندسية حيث a=18 أي  $k\in IR$   $k\in IR$  المندسية حيث a=b المند لينا a=b b=18 و a=b b=18 إذن المساواة (1) تصبح a=18

 $18+18k+18k^2=78k$  : أي: k : أي:  $k+18k+18k^2=78k$  : نضرب الطرفين في k : أي:  $\Delta=100-36=64$  :  $3k^2-10k+3=0$  : ومنه:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

a = 18/3 = 6  $c = 18 \times 3 = 54$  إذن: k = 3 النحتار مثلا: a + b + c = 6 + 18 + 54 = 78 تحقيق: a - b + c = 6 - 18 + 54 = 42 الحظ أن من أجل a = 18/3 = 6 بنحصل على: a = 18/3 = 6 و a = 18/3 = 6

خلاصة: الأعداد المطلوبة هي:

(a;b;c) = (54;18;6) i (a;b;c) = (6;18;54)

#### النمرين 10

: متتالية هندسية متناقصة حيث ( $u_n$ ) متتالية

 $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84$   $u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$ 

مب الحدود :  $u_1$  ثم  $u_1$  ;  $u_3$  والأساس  $u_2$  للمتتالية . (1

 $(u)_{n \in \mathbb{N}}$ . عبر عن  $u_n$  بدلالة n وأدرس تقارب المتتالية  $u_n$ 

3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث:

 $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 

4) أحسب بدلالة n المجموع 'S حيث:

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}.$$

$$v_n = v_0 q^n = -2 \left(\frac{2}{5}\right)^n$$
 :  $n$  אַנאי  $v_n$  (  $v_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 1}$  טוט  $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$  טוע.

$$u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 4}{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}$$
 as y

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
 (\*\*
$$S_n = -2 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{10}{3} \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 \right]$$
 (\*\*)

#### التعرين 09

أعداد حقيقة غير معدومة c;b;a

1) بين أن إذا كانت a; b; a بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن:

 $a^{2}+b^{2}+c^{2}=(a+b+c)(a-b+c)$ 

2) أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276.

#### حل النعريين 09

 $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2ac - b^2 + c^2$  إذا كانت a : c : b : a بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية  $a : c : b^2$  بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية  $a : c : b^2$  بهذا الخدسي لدينا:  $a : c : b^2$  ومنه:  $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2b^2 - b^2 + c^2$   $= a^2 + b^2 + c^2$ 

c; b; a الترتيب هذه الأعداد المطلوبة إذن:

$$\begin{cases} a+b+c = 78 \\ a^2+b^2+c^2 = 3276 \end{cases}$$

$$(1) فإن (1) فإن (a-b+c)$$

$$(a^2+b^2+c^2 = (a;b+c)(a-b+c)$$

#### التعبير عن ١١ بدلالة ١١:

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$
  
: (u)<sub>n∈N</sub>, خدراسة تقارب المتالية

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

$$S$$
 أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S$  حيث:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - (2)^n}{1 - 2} = -2[1 - (2)^n]$$

4) حساب بدلالة 11 المجموع 'S:

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 \cdot q} + \frac{1}{u_1 \cdot q^2} + \dots + \frac{1}{u_1 q^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{u_1} \left[ \frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^{0}+\left(\frac{1}{q}\right)^{1}+\left(\frac{1}{q}\right)^{2}+\ldots+\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{q} \times \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \frac{1}{q}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول $u_1$  وأساسها  $(u_n)$ 

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} : \varphi q$$

1) أ أحسب  $u_2$  والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد  $u_2$ 

#### حل التعرين 10:

 $(u_n)$  عساب الحدود  $(u_n)$  ثم  $(u_n)$  في الأساس  $(u_n)$  للمتتالية  $(u_n)$ لدينا:  $u_1 \times u_2 \times u_3 = 64.....(1)$  ولدينا خاصية الوسط الهندسي على الحدود  $u_1; u_2 : u_1; u_3$  فإن:  $u_2^2 = u_1 \times u_3$ 

$$u_{2} = 4 : u_{2}^{3} = 64 : (1) = 0$$

$$\begin{cases} u_{1}.u_{2}.u_{3} = 64 \\ u_{1}^{2} + u_{2}^{2} + u_{3}^{2} = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1}.4.u_{3} = 64 \\ u_{1}^{2} + 16 + u_{3}^{2} = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1}.4.u_{3} = 64 \\ u_{1}^{2} + 16 + u_{3}^{2} = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1}.u_{3} = 16 \\ u_{1}^{2} + u_{3}^{2} = 68 \end{cases}$$

 $u_1 = \frac{16}{u_1}$  فإن:  $u_1 \times u_3 = 16$  من المعادلة

$$u_1^2 + u_3^2 = 68$$
 is its in  $u_1$  is  $u_2$  is  $u_3$  is  $u_4$ 

 $\frac{256 + u_3^4}{u_3^2} = 68$  نجد:  $\frac{256}{u_3^2} + u_3^2 = 68$  نجد:

 $x = u_3^2$ : نضع:  $u_3^4 - 68u_3^2 + 256 = 0$ 

 $x^2 - 68x + 256 = 0$ 

 $x_2 = 64$  أو  $x_1 = 4$ : نجد کنید کساب المیز  $\Delta$  نجد

 $x_{2} = 64 \text{ u} \circ$  $x_1 = 4 \ U \circ$ 

 $u_3^2 = 64$ : فإن  $u_3^2 = 4$ : فإن:

u3 =8 : 423  $u_3 = 2$  :

 $u_3 = -8$  $u_3 = -2$ 

> $u_2 = 4$  بها أن  $(u_n)$  متتالية هندسية متناقصة و  $u_1 = \frac{16}{u_3} = 2$  و  $u_3 = 8$

 $q = \frac{u_2}{u_1} = 2 : q \quad \text{and} \quad q = \frac{u_2}{u_1} = 2 : q \quad \text{and} \quad q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u_2} = \frac{u_2}{u_2$ 

130 الأول الله ..

 $u_2 = u_1 q : q$  حساب الأساس  $q = \frac{u_2}{u} = \frac{6}{2} = 3$ :  $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} / S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n / =$  $=u_1 \times \frac{q^n-1}{q-1} = 3^n-1$  $3^n - 1 = 728$  أي  $S_n = 728$  : تعيين n حيث  $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$ :  $3^n = 729$  $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$  y  $v_1 = 2$  (2)  $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5 : v_3 = v_2$  أ  $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$  $w_n = \frac{v_n}{u} - \frac{2}{3} : \text{t.i.}$  $w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$  $=\frac{3v_n+2u_n}{6u_n}-\frac{2}{3}=\frac{3v_n+2u_n-4u_n}{6u}$  $= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right)$  $=\frac{1}{2}w_n$ ومنه :  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  $w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$   $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$  /  $w_n = \frac{v_n}{u} - \frac{2}{3} : n$  عبارة  $v_n$  بدلالة  $v_n = w_n u_n + \frac{2}{3} u_n$   $v_n = \left( w_n + \frac{2}{3} \right) u_n$ :  $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$ 

#### حل التمرين 11

 $(u_{2})^{2} = u_{1} \times u_{3} \text{ if is alternia } (u_{n}) \text{ of } (1)$   $u_{2} = 6 : d_{2})^{3} = 216 : e_{0}$   $\begin{cases} u_{1} + 2u_{2} + u_{3} = 32 \\ u_{1} \times u_{2} \times u_{3} = 216 \end{cases}$   $\begin{cases} u_{1} + 2 \times 6 + u_{3} = 32 \\ u_{1} \times 6 \times u_{3} = 216 \end{cases}$   $\begin{cases} u_{1} + u_{3} = 20 .......(1) \\ u_{1} \times u_{3} = 36 ......(2) \end{cases}$   $\vdots \text{ if } u_{1} = u_{1} = 36$   $-u_{1}(20 - u_{1}) = 36$   $-u_{1}^{2} + 20u_{1} - 36 = 0$   $u_{1} = 18 \quad \text{if } u_{1} = 2$   $e_{0} = u_{1} = 18 \quad \text{of } u_{1} = 2$   $e_{0} = u_{1} = 18$   $e_{0} = u_{1} = 1$ 

$$u_{n+1} - u_n = e^{n+1} - e^n = e^n (e-1) > 0$$
  
. arithm or  $(u_n)$  arithm or  $(u_n)$ 

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{n+1}=+\infty:$$
 ولدينا ولدينا = بالله متباعدة  $(u_n)$  متباعدة

$$S = u_1 + u_2 + \dots u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$= e^2 \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{e^2}{e - 1} (e^n - 1)$$

$$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$
(3)

: متتالية حسابية (
$$v_n$$
) أ/ إثبات أن (4

: متتالية حسابية إذا تحقق مايلى (
$$v_n$$
)

$$v_{n+1} = v_n + r$$
 حیث ( عدد حقیقی ثابت  $v_{n+1} = v_n + r$   $v_{n+1} = 3\ln(u_{n+2}) - \ln u_{n+1}$   $= 3\ln(e \cdot u_{n+1}) - \ln(e \cdot u_n)$   $= 2\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$   $= 3\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln e - \ln u_n$ 

= 
$$2 \ln e + 3 \ln u_{n+1} - \ln u_n = v_n + 2$$
  
 $r = 2$  ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها

$$S_n = v_0 + v_1 ... + v_{n-1} = \frac{n-1-0+1}{2} (v_0 + v_{n-1}) / v_0$$
  
 $v_0 = 3 \ln u_1 - \ln u_0 = 3 \ln e^2 - \ln e : - \sin e - \sin e = 5 \ln e = 5$ 

$$v_{n-1} = v_0 + (n-1) \cdot r = 5 + (n-1)2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(5+5+(n-1)2) = n(5+(n-1))$$
:

#### التعرين 13

هل المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان في كل حالة من الحالات التالية:

( $u_n$ ) و  $(u_n)$  متتالیتان معرفتان من أجل کل عدد طبیعي ( $u_n$ )

$$v_n = 3 - \frac{5}{n}$$
  $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$  :...  $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ 

( $u_n$ ) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1$$
  $\int \ln u_3 + 2 \ln \sqrt{u_6} = 11$ 

$$u_0$$
 عين أساس المتتالية  $(u_n)$  وحدها الأول (1

2) أكتب 
$$u_n$$
 بدلالة  $n$  ثم أدرس اتجاه تغير وتقارب المتتالية  $(u_n)$ .

. 
$$n$$
 بدلالة  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة (3

ب: 
$$N$$
 متتالية عددية معرفة على  $N$  ب

$$v_n = 3 \ln u_{n+1} - \ln u_n$$

أ/ أثبت أن  $(v_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع:

$$S_n = v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$

#### حل التعريين 12

:  $u_0$  تعين أساس المتتالية  $(u_n)$  وحدها الأول (1

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1$$
 و  $\ln u_3 + 2 \ln \sqrt{u_6} = 11$ : لدينا

$$\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$$
  $\ln u_3 + 2 \times \frac{1}{2} \ln u_6 = 11$   $e^{-1}$ 

$$\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1 \quad \text{o} \quad \ln(u_3 \cdot u_6) = 11$$

$$\frac{u_3}{u_2} = e$$
  $u_3 \times u_6 = e^{11}$ :

$$(u_n)$$
 معناه:  $q = e$  أساس المتتالية

$$u_0 \cdot q^3 \cdot u_0 \cdot q^6 = e^{11}$$
: ولدينا :  $u_3 \times u_6 = e^{11}$ 

$$u_0 = e$$
: ومنه:  $u_0^2 = e^2$  : إلى أي  $u_0^2 \cdot e^9 = e^{11}$  ومنه:

(
$$(u_n)$$
) متتالية هندسية حدودها موجبة تمام)

$$u_n = u_0 \cdot q^n = e \cdot e^n = e^{n+1} : n$$
 عبارة  $u_n$  بدلالة  $u_n = u_0 \cdot q^n = e \cdot e^n = e^{n+1} : n$  دراسة اتجاه تغیرات  $(u_n)$ 

$$= \frac{n+2n(2n+1)-2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-6n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

(إذن:  $0 > v_{n+1} - v_n < 0$  متناقصة تماما)

 $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n = 0$  ولدينا أيضا و لدينا أيضا متتالية متزايدة تماما و  $(v_n)$  متتالية

 $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0 \quad \text{on a similar}$ 

إذن: حسب التعريف فإن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

#### الدرين 14

 $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$  ومن أجل  $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  : n ومن أجل كل عدد طبيعي  $u_n < v_n$  : n ومن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي (1) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي (2) برهن أن المتتاليتان  $u_n$  ( $u_n$ ) و  $u_n$  متجاورتان.  $u_n = u_n + av_n$  نضع :  $u_n = u_n + av_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $u_n$  نضع :  $u_n = u_n + av_n$  نصع يتكون المتتاليتان متهايزان. (3) أو جد  $u_n$  و  $u_n$  حيث تكون المتتاليتان  $u_n$  و  $u_n$  و  $u_n$  و  $u_n$  و  $u_n$  و  $u_n$  و  $u_n$  ( $u_n$ ) و  $u_n$  ( $u_n$ )

 $y_n$ هندسیتان ثم عبر عن  $x_n$  و  $x_n$  ثم عبر بدلالة n عن  $x_n$  و  $x_n$  بدلالة  $x_n$ 

 $(v_n)$  و  $(u_n)$  أو جد النهاية المشتركة للمتتاليتان  $(u_n)$  و

#### حل التمرين 14

 $u_n < v_n : n$  البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $u_n < v_n : n$  إذن الخاصية من أجل  $u_0 < v_0 : n = 0$  إذن الخاصية n = 0 معققة من أجل n = 0

$$(u_n)_{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$
 غبر معدوم  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  غبر معدوم  $u_n = u_n + \frac{1}{n}$ 

## حل التعرين 13:

(1)  $u_n$  المتتالية  $u_n$  ليست رتيبة لأن العدد  $u_n$  الموجب إذا كان  $u_n$  فردي وعليه موجب إذا كان  $u_n$  فردي وعليه فالمتاليتان  $u_n$  و  $u_n$  الايمكن أن تكونا متجاورتان حسب النعريف.

حذار: في هذا المثال  $u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 3$  ولكنهما متاليتان غير متجاورتان.

الدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} = \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

(إذن:  $u_n = u_n - u_n$  أي المتتالية  $u_{n+1} - u_n > 0$ ) متزايدة تماما)

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(u_{n+1} - u_n\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

خلاصة: ( " ١١) متتالية متزايدة تماما و ( ٣ ) متتالية متناقصة  $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \quad \text{and} \quad$ إذن: المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان إذن: هما متقاربتان نحو نفس النهاية 1  $x_{n+1} = u_{n+1} + av_{n+1}$ : فإن  $u_{n+1} = u_{n+1} + av_{n+1}$  ) من أجل كل عدد طبيعي  $x_{n+1} = u_{n+1} + av_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a\left(\frac{u_n + 4v_n}{5}\right)$  $= \frac{5u_n + 5v_n + 2au_n + 8av_n}{10}$  $=\frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10}$  $2a+5\neq 0$  حيث  $=\frac{2a+5}{10}\times\left(u_n+\frac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$ إذن: تكون  $(x_n)$  متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أن  $n \in IN$  کل  $x_{n+1} = \frac{2a+5}{10} x_n$  من أجل كل  $u_n + \frac{8a+5}{2a+5}v_n = u_n + av_n$  $2a+5\neq 0$  مع  $\frac{8a+5}{2a+5}=a$  إذن: يكفي ويلزم أن يكون:  $2a^2 + 3a - 5 = 0$ ;  $2a^2 + 5a = 8a + 5$ ; وهي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول a.  $\Delta = 9 + 40 = 49$  $a_2 = \frac{3-7}{4} = -1/1$   $a_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$  $2a+5=3\neq 0$  فإن من أجل a=-1

 $u_{n+1} < v_{n+1}$ :نفرض أن  $u_n < v_n$  من أجل  $u_n < v_n$  نفرض أن  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$  the limit is  $=\frac{5u_n+5v_n-2u_n-8v_n}{10}$  $=\frac{3u_n-3v_n}{10}=\frac{3}{10}(u_n-v_n)$  $u_n - v_n < 0$  لكن حسب فرضية التراجع  $u_n < v_n$  أي  $|u_{n+1} < v_{n+1}|$  ومنه:  $|u_{n+1} < v_{n+1}| < 0$  أي  $|\frac{3}{10}(u_n - v_n)| < 0$ n+1 إذن: الخاصية صحيحة من أجل  $u_n < v_n : n$  نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي 2) هل  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان؟ اتجاه التغير: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-1}{2} (u_n - v_n)$  $=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n-v_n) > 0$ ومنه:  $u_n > 0$  متزایدة تماما. المتتالیة  $u_{n+1} - u_n > 0$  $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$  $=\frac{u_n+4v_n-5v_n}{5}=\frac{1}{5}(u_n-v_n)<0$ . إذن:  $v_{n+1} - v_n < 0$  إذن:  $v_{n+1} - v_n < 0$  $u_n - v_n$  نهاية الفرق  $\lim_{n \to +\infty} \left( u_{n+1} - v_{n+1} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left( u_n - v_n \right)$ (1) كن:  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$  كن:  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10} (u_n - v_n) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 (u_{n-1} - v_{n-1})$ :  $= \dots = \left(\frac{3}{10}\right)^n ((u_0) - v_0)$ 

 $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 :$ 

#### حل التعرين 15

 $u_n \in I$  : ي أمرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي:  $u_{n+1} \in I$  أي:  $u_{n+1} \in I$  أي:  $u_{n+1} \in I$  أي:  $u_n \in I$  ألدينا :  $u_n \in I$  ومنه  $u_n \in I$  أي:  $u_{n+1} \in I$  ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن  $u_n \in I$ 

لكل عد طبيعي n.

صحيحة من أجل n = 0.

 $:(U_n)$  با تجاه تغیر المتتالیة

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2}{-U_n + 4} - U_n$$

$$= \frac{U_n^2 - 4U_n + U_n + 2}{-U_n + 4}$$

$$= \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{-U_n + 4}$$

إذن:  $4 = \ell + \frac{5}{2}\ell$  أي:  $4 = \ell + \frac{5}{2}\ell$  وهو المطلوب  $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 8/7$ 

#### التمرين 115

## ( بكالوريا 2008 علمي)

: بالعبارة f المعرفة على المجال I=[1,2] بالعبارة f

$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$$

. I بين أن الدالة f متزايدة تمــاما على f

I المجال x من المجال كل عدد حقيقي x من المجال x

Iينتمي إلى f(x)

ناتي :  $(U_n)^{(2)}$  هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي :

$$U_{n+1} = f(U_n)$$
 ,  $U_0 = \frac{3}{2}$ 

 $I_n$ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $U_n$ , يتتمي  $v_n$  يتتمي  $v_n$ أدرس اتجاه تغير المتتالية  $v_n$ ). أستنتج أنها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

(بكالوريا 2008 علمي) متتالية عددية معرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{5}{2}$  و من أجل ( $u_n$ )  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$  .n  $\geq 2$  $(o,i,\overline{j})$  أرسم في معلم متعامد و متجانس  $(0,i,\overline{j})$ المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته y=x والمنحنى ( $\Delta$ ) المثل  $f(x) = \frac{2}{3}x + 2 : R$  للدالة f المعرفة على R بـ: ب/ باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور  $.u_4, u_3, u_2, u_1, u_0$ : الفواصل و دون حساب الحدود ج/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها. 2) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

> $u_n \leq 6$  $u_n$ ) متزایدة.

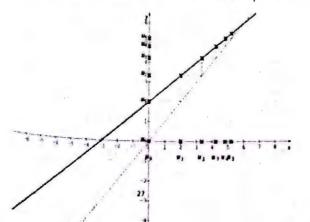
ج/ هل  $(u_n)$  متقاربة ؟ برر إجابتك.

 $v_n = u_n = 6$ : n نضع من أجل كل عدد طبيعي (3 أ/ أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

.  $\lim_{n\to+\infty} u_n$  بدلالة n ثم استنج بارة  $U_n$  بدلالة

### حل التمرين 16:

(1) أ  $(u_4, u_3, u_2, u_1, u_0)$  و غثيل الحدود (d) و  $(\Delta)$ 



$$(U_n-1)(U_n-2) \le 0$$
 :  $0 \le U_n \le 2$  : بيا أن  $0 \le U_n \le 2$  فإن  $-U_n+4 \ge 0$ 

. ومنه  $\left(U_{_{n}}
ight)$  متناقصة  $U_{_{n+1}}-U_{_{n}}\leq 0$ 

الاستنتاج : لدينا  $(U_n)$  متناقصة و محدودة من الأدنى فهي

متقاربة. 
$$U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} : P(n)$$
 الخاصية (3)

$$U_0 = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} : n = 0$$
 من أجل  $P(0) : 0$  صحيحة .

$$U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$
 : نفرض أن  $P(n)$  صحيحة أي

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$
: نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 4} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{-1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 4}$$

$$= \frac{3 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 1}}{3 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 1}} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

$$P(n+1)$$
 نجد:  $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$  عصيحة.

$$U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$
 حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن

$$\operatorname{N}$$
 لكل  $\operatorname{n}$  من  $\operatorname{N}$   $\operatorname{lim}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$  لأن  $\operatorname{lim}U_n = 1$  ب $t = 1$ 

(بكالوريا 2009 علمي)

(u") متتالية معرفة على N كما يلي :

$$u_0 = 1$$
 ,  $u_1 = 2$  ,  $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ 

$$v_n=u_{n+1}-u_n:$$
المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $N$  كما يلي

.  $v_1$  و  $v_0$  و الم

2) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

:  $S_n$  أ/ أحسب بدلالة n المجموع (3

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

: n برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي +

$$u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$

 $v_0 = u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$  (1)

 $v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1$ 

 $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{7}{3}$ 

 $v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$ :

عدد ( $v_n$ ) متتالية هندسية إذا تحقق مايلي : من أجل كل عدد

طبيعي n فإن:  $v_n \times q = v_{n+1} \times q$  عدد حقيقي ثابت)

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

.  $q=\frac{1}{3}$  ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها

ب/ النخمين: في الرسم نلاحظ أن: الحدود ب  $u_4 > u_3 > u_2 > u_1 > u_1 > u_2 > u_1 > u_2 > u_2 > u_1 > u_0$ ر عليه: تراكم حول العدد 6 و عليه:

فإن: المتالية ( س متزايدة و متقاربة من العدد 6.

 $u_n \le 6$  : الخاصية P(n) الخاصية الكن

 $\frac{5}{2} \le 6$  من اجل  $u_0 \le 6$  n = 0 صحيحة لأن

نفرض أن P(n) صحيحة أي  $0 \leq n \leq n$  و نبرهن صحة نفرض أن

 $u_{n+1} \le 6$  آي P(n+1)

 $\frac{2}{3}u_n + 2 \le 6$ : ومنه  $\frac{2}{3}u_n \le 4$  ومنه  $u_n \le 6$ : لدينا

P(n+1) : اي  $u_{n+1} \le 6$  صحيحة.

 $u_n \leq 6$ : کال بالتراجع. فإن  $u_n \leq 6$  لکل حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

ب) النحقق أن ( س) متزايدة من أجل عدد طبيعي n:

 $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$  $=-\frac{1}{3}u_n+\frac{6}{3}=-\frac{1}{3}(u_n-6)$ 

 $-\frac{1}{3}(u_n-6) \ge 0$  لدينا  $u_n-6 \le 0$  لدينا

أي:  $u_{n+1} - u_n \ge 0$  إذن:  $u_{n+1} - u_n \ge 0$ 

 $\pi / (u_*)$  متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ من أجل كل عدد طبيعي n.

 $V_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6$ 

 $=\frac{2}{3}u_n-4=\frac{2}{3}(u_n-6)=\frac{2}{3}V_n$ 

أي  $(V_*)$  متالية هندسية أساسها  $q=\frac{2}{3}$  و حدها الأول

 $U_n = V_n + 6 = -\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$  (4)

 $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$  الله  $U_n = 6$  الله وللينا:

n بدلاله n نم استنج  $v_n$  بدلاله  $v_n$ 

$$u_{3} = 20 - u_{1} : (1)$$
 من  $u_{3} = 20 - u_{1} : (1)$  نعوض  $u_{1}^{2} + 20u_{1} - 36 = 0$  نجد  $u_{1}(20 - u_{1}) = 36 : 36$  نجد  $u_{1} = 2$  مقبول . أو  $u_{1} = 2$  مرفوض  $u_{1} = 2$  أن  $u_{1} = 2$  أن  $u_{1} = 2$  أن  $u_{1} = 2$  أن  $u_{2} = 20 - 2 = 18$  فإن  $u_{1} = 2$  أن  $u_{2} = u_{1}q$   $u_{2} = u_{1}q$   $u_{2} = u_{1}q$  أرمنه  $u_{3} = 20 - 2 = 18$  ومنه  $u_{4} = \frac{u_{2}}{u_{1}} = \frac{6}{2} = 3$ 

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} / 2$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n / 2$$

$$= u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3^n - 1$$

$$3^{n} - 1 = 728$$
 ومنه  $S_{n} = 728$ :
$$v_{n+1} = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$$
:
 $v_{n} = \frac{3}{2}v_{n} + u_{n}$ 
 $v_{n} = 2$  (2)

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
 /1 (3)

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} / \omega$$

$$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$$

$$= u_n - u_0$$

$$S_n = u_n - u_0 : \emptyset$$

$$u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$

### (بكالوريا 2009 علمي)

متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول $u_1$  وأساسها  $(u_n)$ 

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} : 2q$$

1) أ/ أحسب  $u_2$  والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد

. n بدلالة  $u_n$  بدلالة  $u_n$ 

: حيث S<sub>n</sub> حيث

$$n$$
 بدلالة  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 

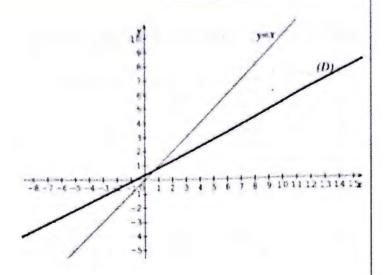
.  $S_n = 728$  : بحيث يكون العدد الطبيعي n بحيث يكون

2)  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$
 معدوم کیا یلي :  $v_1 = 2$  : معدوم کیا یلي :  $v_1 = 2$  .  $v_2$  أحسب  $v_2$  و  $v_3$  .

+/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

 $\frac{1}{2}$  بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $w_n = \frac{v_n}{u} - \frac{2}{3}$ 



لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية (1. n و من أجل كل عدد طبيعي  $u_0 = 6$  . ب

$$.\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية:

. دون حسابها مبرزا خطوط الرسم  $u_4, u_3, u_2, u_1, u_0$ 

(D) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين  $(\Delta)$  و

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

2) أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل

.  $u_{n_i} > \frac{2}{3}$  ، n عدد طبيعي

 $(u_n)$  استنتج اتجاه تغير المتتالية

n نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي (3

 $v_n = u_n - \frac{2}{3}$  : بالعلاقة

أ) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها

الأول ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام  $\nu_n$  ، و استنتج

n عبارة  $u_n$  بدلالة

ج) احسب بدلالة n المجموع  $S_n$  حيث:

 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ 

 $S'_{n} = u_{0} + u_{1} + \dots + u_{n}$  حيث  $S'_{n}$  حيث المجموع

$$v_{2} = \frac{3}{2}v_{1} + u_{1} = 5 : v_{3} = v_{2} + u_{2} = \frac{27}{2},$$

$$v_{3} = \frac{3}{2}v_{2} + u_{2} = \frac{27}{2},$$

$$w_{n} = \frac{v_{n} - 2}{u_{n}} : \frac{3}{3} : \frac{3v_{n} + 2u_{n}}{u_{n}} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3v_{n} + 2u_{n} - 4u_{n}}{6u_{n}}$$

$$= \frac{-2u_{n} + 3v_{n}}{6u_{n}} = \frac{v_{n}}{2u_{n}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{n}}{u_{n}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_{n}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{n}}{u_{n}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$w_{1} = \frac{v_{1}}{u_{1}} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$v_{2} = \frac{v_{1}}{u_{2}} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$w_{n} = w_{1}q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$w_{n} = \frac{v_{n}}{2} - \frac{2}{3} \text{ that is } n \text{ if } N = v_{n} \text{ is def}$$

 $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} : \text{legisl} : n$ 

$$v_n = \left(w_n + \frac{2}{3}\right)u_n = w_n u_n + \frac{2}{3}u_n : \omega_n$$

$$2(3)^{n-1} \quad 4$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$$

(بكالوريا 2010 علمي)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

مثلنا المستقیمین  $(\Delta)$  و (D) معادلتیهما علی الترتیب

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$
  $y = x$ 

$$-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} < 0 \text{ as } j - \frac{1}{2}u_n < -\frac{1}{3} \text{ cs}$$

اي  $u_n < u_n < u_n$  مناقصة تماما .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

$$v_0 = \frac{16}{3}$$
 إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول

$$v_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
 : هي  $v_n : 1$  هجارة الحد العام لـ :  $v_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 

$$u_n = v_n + \frac{2}{3}$$
 لدينا من أجل كل  $n$  طبيعي

$$u_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$
 where  $u_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$ 

$$S'_{n} = u_{0} + u_{1} + \dots + u_{n}$$

$$= \left(v_{0} + \frac{2}{3}\right) + \left(v_{1} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_{n} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= S_{n} + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$S'_n = -\frac{32}{3} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) + \frac{2}{3} (n+1) : j$$

#### النعرين 20

### (بكالوريا 2011 علمي)

المتتالية العددية المعرفة بـ :  $u_0 = -1$  و من أجل كل  $u_n$  عدد طبيعي  $u_n + 1$  ،  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  ،

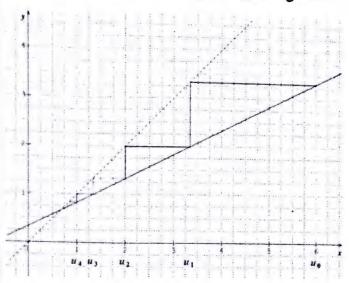
المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $^{n}$   $^{+}$ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآنية اقترحت ثلاث إجابات إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.
1) المتتالية (٧,١):

### حل التعريين 19 :

1) أ) نقل المنحني وتمثيل الحدود على محور الفواصل:



ب) فاصلة نقطة التقاطع  $(\Delta)$  و (D) هي حلول المعادلة

$$(\Delta) \cap (D) = \left\{ H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

ج) التخمين هو أن المتتالية متناقصة تماما .

 $u_0 > \frac{2}{3}$  أ) الخاصية صحيحة من أجل n = 0 لأن (2

 $u_{n+1} > \frac{2}{3}$  و نثبت أنها صحيحة من أجل n+1 أي

لدينا  $\frac{1}{3}u_n > \frac{1}{3}$  تعني أيضا

n اي  $u_{n+1} > \frac{2}{3}$  اي  $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$ 

 $u_n > \frac{2}{3}$  : طبيعي

 $\cdot$  با لدينا من أجل كل n طبيعي :

$$u_n > \frac{2}{3}$$
 لکن  $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$ 

أ. حسابية. ب. هندسية. ج. لا حسابية و لا هندسية.

### (بكالوريا 2011 علمي)

lphaعدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

متتالية عددية معرفة على N بـ :  $6=u_0$  و من أجل  $(u_n)$ 

 $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ ، اکل عدد طبیعی

به: n متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n به:

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$$

. lpha متتالية هندسية أساسها  $(v_n)$  أ) بين أن (1

n بدلالة n و  $\alpha$  ، عبارة  $v_n$  ثم استنتج بدلالة n

 $u_n$  عبارة  $\alpha$ 

ج) عين قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  التي تكون من أجلها المتتالية

متقاربة.  $(u_n)$ 

 $S_n$  نضع  $\alpha = \frac{3}{2}$  نضع (2) نضع  $\alpha = \frac{3}{2}$  نضع (2)

 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n :$   $= T_n$ 

 $.T_n = u_0 + u_1 + .... + u_n \$ 

أ) أ) إثبات أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية :  $(V_n)$  متتالية هندسية

 $V_{n+1} = q \times V_n$ : يعني أنه يوجد عدد حقيقي q حيث

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

 $V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha U_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ 

 $=\alpha U_n + \frac{\alpha - 1 + 1}{\alpha - 1}$ 

 $V_{n+1} = \alpha U_n + \frac{1}{x-1} = x \left( U_n + \frac{1}{\alpha - 1} \right) = \alpha \times V_n$ 

q=lpha و عليه  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها

# $\infty$ . ج $\left|-\frac{1}{2}\right|$ به المتتالية $\left(u_{n}\right)$ هي : أ. $\infty+\left\langle -\frac{1}{2}\right|$ ج. $\infty$ 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = -\frac{1}{2} \left[ 1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3} \right]$$

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} .1$$

$$S_n = \frac{1-3^n}{4} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

### حل النمريين 20

: بالتتالية  $(V_n)$  هي  $(V_n)$  عندسية الأن (1

$$V_{n+1} = V_{n+1} + \frac{1}{2} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$
$$= 3U_n + \frac{3}{2} = 3\left(U_n + \frac{1}{2}\right) = 3V_n$$

: لأن 
$$(+\infty)$$
 هي $(U_n)$  لأن (2

 $V_0$  =  $-rac{1}{2}$ :وحدّها الأول q=3 متتالية هندسية أساسها وq=3

$$V_n = V_0 q^n = -\frac{1}{2} \times 3^n : \mathcal{G}^{\uparrow}$$

$$U_n = V_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \left( -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2} \right) = -\infty$$
 وبالتالي :

: هي  $S_n$  ، n هي اجل کل عدد طبيعي

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4} - \varepsilon$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \left[ 1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3} \right] : \forall$$

$$= -\frac{1}{2} \left( 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left( 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

$$V_0 = U_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}$$
: لدينا

$$V_n = V_0 \times q^n = \left(\frac{6x-5}{x-1}\right) \cdot \alpha^n$$
 : وعليه

:  $\alpha$  و n بدلالة  $U_n$  استنتاج

$$U_n = V_n - \frac{1}{\alpha - 1}$$
: فإن  $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha - 1}$ : بيا أن

$$U_n = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1} : \text{also}$$

ج) تعیین قیم 
$$lpha$$
 حتی تکون من أجلها  $(U_n)$  متقاربة :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$$
 : حتى تكون  $(U_n)$  متقاربة يجب أن تكون

. 
$$x \in \left]0,1\right[$$
 و عليه قيم  $\alpha$  المكنة هي

: 
$$T_n$$
 و  $S_n$  بوضع  $\alpha = \frac{3}{2}$  حساب المجموعين (2

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$V_0 = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$
: لدينا

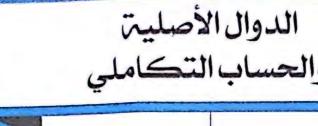
$$S_n = 8 \left[ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right] = 16 \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1 \right] : \text{also } s$$

$$T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$
  
=  $(V_0 - 2) + (V_1 - 2) + \dots + (V_n - 2)$ 

ومن جهة :

$$= S_n - 2(n+1) = 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 16 - 2n - 2$$
$$= 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

# الدوال الأصلية والحساب التكاملي





1) نعريف دالة أصلية لدالة:

ر دالة عددية معرفة على مجال I. نسمى دالة أصلية للدالة fكل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث من أجل كل fF'(x) = f(x) : فإن  $x \in I$ 

د: R معرفة على  $f \circ :$ 

$$f(x) = 2x F(x) = x^2 + 1$$

 $x \in R$  قابلة للاشتقاق على R حيث من أجل كل

: ومنه 
$$F'(x) = x^2 + 1 = 2x = f(x)$$

. R دالة أصلية للدالة f على F

#### 2) مجموعة الدوال الأصلية:

I اذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال

وتسمى كل الدوال من الشكل :  $x \mapsto F(x) + c$  بمجموع الدوال الأصلية للدالة f على مجال C ). I عدد حقيقي ثابت

f(x) = 2x بثال: • f معرفة على R بـ: f

. R على f دالة أصلية للدالة f على  $F_1$  دالة أصلية للدالة f

فإن مجموع الدوال الأصلية للدالة f على R هي جميع

 $F(x) = x^2 + 1 + c$ lk oi ll like of the like of the

(عدد حقیقی ثابت) عدد حقیقی c

3) الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة المتغير: إذا كانت  $\overline{F}$  دالة أصلية للدالة f على مجال ا f هي مجموع الدوال الأصلية للدالة G(x) = F(x) + cgعلى المجال 1.

 $x_0$  فإن الدالة  $F_1$  التي تأخذ قيمة  $y_0$  من أجل القيمة  $y_0 = F(x_0) + c$  :  $g(x_0) = y_0$ :

 $F_1(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$  : ومنه  $c = y_0 - F(x_0)$ 4) الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

| الدالة f                            | دوالها الأصلية F               | المجال 1   |
|-------------------------------------|--------------------------------|------------|
| (a) عدد حقيقي ثابت)                 | a.x + c                        | R          |
| $(n \in N^*) x^n$                   | $\frac{1}{n+1}.x^{n+1}+c$      | R          |
| $(n \in N^* - \{1\}) \frac{1}{x^n}$ | $\frac{-1}{(n-1).x^{n-1}} + c$ | ]0;∞ -[ أو |
|                                     |                                | ]0;+∞[     |
| $\sin(x)$                           | $-\cos(x)+c$                   | R          |
| cos(x)                              | $\sin(x) + c$                  | R          |
| $\frac{1}{2\sqrt{x}}$               | $\sqrt{x}+c$                   | ]0;+∞[     |
| $\frac{1}{x}$                       | $\ln x + c$                    | ]0;+∞[     |
| $e^x$                               | $e^x + c$                      | R          |

5) العمليات على الدوال الأصلية:

I دالة أصلية للدالة f على المجال F دالة أصلية للدالة المجموع المجال المجال المجموع المجال ال F+G على المجال I فإن : الدالة f على المجال المجال المالة أصلية للدالة و . I على المجال f+g على المجال

• جداء عدد حقيقي بدالة:

I إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال

k و I دالة أصلية للدالة f على المجال G(عدد حقیقی ثابت)

. الدالة k.F على المجال k.F فإن : الدالة والمجال المجال .  $n \ge 1$  حيث: (u'.u'') الدالة الأصلية للدالة

ونرمز له بـ:  $\int\limits_a^b f(x)dx$  ونقرأ تكامل من a إلى b للدالة

$$\cdot$$
  $x$  تفاضل  $f$ 

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a) :$$

$$\int_{1}^{2} x^{2} dx = \left[\frac{1}{3}.x^{3}\right]_{1}^{2} = \left(\frac{1}{3}.2^{3}\right) - \left(\frac{1}{3}.1^{3}\right) = \frac{7}{3} :$$
مثال :  $\frac{7}{3}$ 

خواص

. حيث 
$$k$$
 عدد حقيقي ثابت  $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$  (3

$$I$$
 علاقة شال : من أجل كل  $a$  و  $b$  و من المجال (4) علاقة شال : من أجل كل  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$ 

$$[a;b]$$
 المقارنة :  $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال (5

: فإن 
$$x \in [a;b]$$
 من أجل كل  $f(x) \ge 0$ 

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \ge 0$$

: فإن  $x \in [a;b]$  من أجل كل  $f(x) \ge g(x)$  فإن g(x)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \ge \int_{a}^{b} g(x)dx$$

#### 2) حساب المساحات:

(Cf) مساحة حيز من المستوى محصور بين (Cf) و محور S

x = b و x = a الفواصل والمستقيمات التي معادلاتها

 $x \in [a;b]$  يقع فوق محور الفواصل لما (Cf) في حالة

$$S = \int_{a}^{b} f(x) dx \quad (u.s)$$

 $\frac{1}{n+1}.u^{n+1}:$  الدالة الأصلية للدالة  $u'.u^n$  هي الدالة الأصلية للدالة u' عيث u' عيث u' الدالة الأصلية للدالة u' هي الدالة الأصلية للدالة u' الدالة الأصلية للدالة u' عندالة الأصلية للدالة u' الدالة الأصلية للدالة u'

 $\sqrt{u}$  : الدالة الأصلية للدالة المالة للدالة الأصلية للدالة المالة الم

: 
$$\left(\frac{u'}{u}\right)$$
 الدالة الأصلية للدالة الأصلية الدالة الدالة الذالة الذالة الدالة الذالة الذالة الذالة الدالة الد

 $\ln |u|$  : الدالة الأصلية للدالة  $\frac{u'}{u}$  هي الدالة

:  $u'.e^{u}$  الدالة الأصلية للدالة ا

 $e^u$  : الدالة الأصلية للدالة  $u^\prime.e^u$  الدالة الأصلية للدالة

 $a \neq 0$  حيث:  $\sin(ax+b)$  عيث:  $\sin(ax+b)$ 

: الدالة الأصلية للدالة  $\sin(ax+b)$  هي الدالة

$$\frac{-1}{a}$$
.cos( $ax + b$ )

 $a \neq 0$  حيث:  $\cos(ax+b)$  عيث • الدالة الأصلية للدالة

: الدالة الأصلية للدالة  $\cos(ax+b)$  هي الدالة

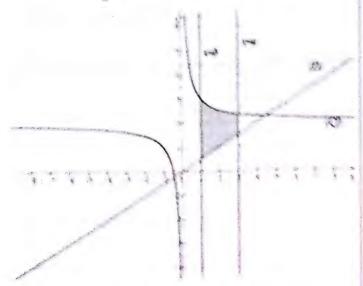
 $\frac{1}{a}$ .sin(ax+b)

الحساب النكاملي وحساب المساحات

#### 1) تعریف:

I دالة مستمرة على المجال I و F دالتها الأصلية على المجال f و a عددان حقيقيان من المجال a . يسمى العدد الحقيقي a و a عددان حقيقيان من a بالتكامل من a إلى a للدالة a

 $S = \int [f(x) - (\alpha, x + \beta)] dx$  (us)



: x = [a:b] u (A) = = = = (C) 21 = jo

$$S = \int [(\alpha x + \beta) - f(x)] dx \text{ (us)}$$

(3) الفيمة المتوسطة لدالة على مجال (m:b):

إذا كانت دالة ﴿ مستمرة على المجال [٥:٥] فإنه يوجد عدد .C∈ [u;h] . 4.2-

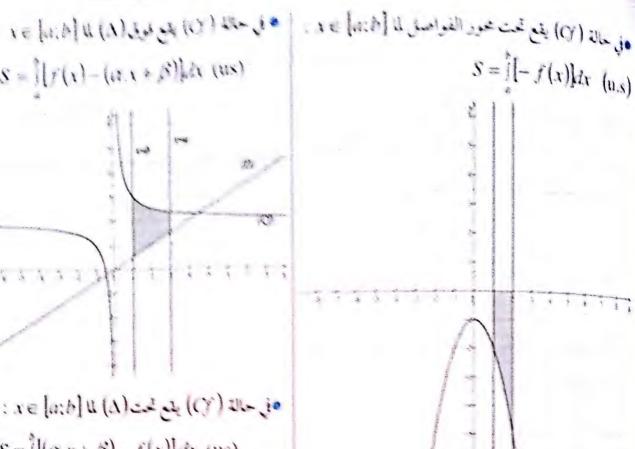
$$f(C) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) dx :$$

وتسمى الفيمة (٢(C) بالقيمة المتوسطة للدالة f على الجال [ط:م].

4) المالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال / والتي تنعدم من أجل قيمة من 1:

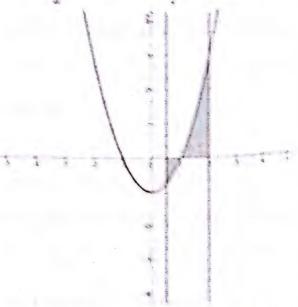
أ بالله مستمرة على المجال 1.

المالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال 1 والتي تنعدم من  $F(x) = \int f(t)dt$ :  $F(x) = \int f(t)dt$ 



 إن حالة ((٧)) يقع تحت محور الفواصل لما (١٣٠٥) عد و (٧٧) يقع فوق محور الفواصل لما [١٥:٠] ٢٠ :

$$S = \iint [-f(x)] dx + \iint [f(x)] dx \text{ (us)}$$



2)؟ مساحة حيز من المستوي محصور بين (٧) و المستقيم  $(10^{-1})$  (1) (1) (1) (2)  $(10^{-1})$  (1) (1) (1) (1) (1)

. X mb & X ma Like

#### تمارين

#### النمرين 01

بين أن الدالة f أصلية للدالة f على المجال D ثم عين دالة أصلية أخرى للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^2 - 10x - 9 (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 9x - 1$$

$$D=R$$
,

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$
 (2)

$$D = ]1; +\infty[ \int F(x) = x^2 - x + \ln(x^2 - 1) \int$$

#### حل التمرين 01:

1) الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال IR ودالتها المشتقة F هي:  $F'(x) = x^2 - 10x - 9 = f(x)$  ومنه F هي دالة أصلية لـ f على IR

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي :

ثابت c عدد حقيقي ثابت  $x\mapsto F(x)+c$  وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة f يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في حبارة :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 9x - 1$$

فنحصل على دالة أصلية أخرى:

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 9x + 1$$

$$F(x) = x^2 - x + \ln(x^2 - 1) (2$$

 $x^2-1>0$  معرفة إذا كان F:F معرفة إذا كان  $D_F=]-\infty;-1$  [U]  $D_F=[-\infty;-1]$ 

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال  $]\infty+;1$  [ودالتها المشتقة هي:  $F(x)=2x-1+\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$  ومنه  $F(x)=1;+\infty$  أصلية لا f على f

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي: c عدد c عدت c خيث c خيث c خيث c خيث على دالة أصلية أخرى للدالة c يكفي تغيير العدد الحقيقي على دالة أصلية أخرى للدالة c يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة c عبارة c أضلية أخرى :

 $G(x) = x^2 - x + \ln(x^2 - 1) + 5$ 

#### لنمرين 02٪

: کمایلی  $R - \{-1;3\}$  کمایلی (1

$$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

عين العددين الحقيقيين lpha و eta بحيث من أجل كل x من

 $: R - \{-1;3\}$ 

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

 $\cdot$  ]3;+ $\infty$  [ على المجال ] ماf على المجال ]

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$
 :ب.] ]0;+∞[ ابد علی  $f(2)$ 

عين الأعداد الحقيقية a و a حيث من أجل كل x من f عين الأعداد الحقيقية f  $f(x) = a + \frac{b e^x}{e^x - 1}$  :  $]0;+\infty[$ 

على المجال ]∞+;0[

#### ما التمريين 02

 $x \in D_f$  اجل ا

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

$$= \frac{2x-2 + \alpha(x-3) + \beta(x+1)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - 3\alpha - 2)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(\alpha + \beta + 2 = 2; \beta - 3\alpha - 2 = -7) : \text{ is all plane}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 2 \\ \beta - 3\alpha - 2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - 3\alpha = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \\ 4\beta = -5 \end{cases} : \text{eais} \begin{cases} \alpha = \frac{5}{4} \\ \beta = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

 $[x \in D_f]$  استتاج دالة أصلية للدالة  $[x \in D_f]$  على المجال  $[x \in D_f]$  من أجل

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{5}{4(x-3)}$$

 $\ln |u|$  : هي الدالة الأصلية للدالة  $\frac{u'}{u}$  هي الدالة

من أجل كل ]∞+,3>0: x ∈ ]3;+∞ و 1>0 و x+1>0

 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 

لدينا الدالة الأصلية للدالة  $\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$  على

 $x \mapsto \ln(x^2 - 2x - 3)$  هي  $[3; +\infty]$ 

لدينا الدالة الأصلية للدالة  $\frac{5}{4(x+1)}$  على المجال

$$x \mapsto \frac{5}{4} \ln(x+1) \approx [3;+\infty[$$

لدينا الدالة الأصلية للدالة  $\frac{5}{4(x-3)}$  على المجال

$$x \mapsto \frac{5}{4} \ln(x-3) \text{ as } ]3;+\infty[$$

: فالدالة :  $x \in [3;+\infty[$  ومنه : من أجل كل

$$x \to \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4}\ln(x + 1) + \frac{5}{4}\ln(x - 3)$$

دالة أصلية للدالة f في المجال ] $3;+\infty$  ولدينا:

دالة أصلية 
$$F(x) = \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4} \ln \frac{x+1}{x-3}$$

. ]3;+ $\infty$ [ للدالة f على المجال

 $: ]0;+\infty[$  من أجل كل x من أجل كل (2

$$a + \frac{be^{x}}{e^{x} - 1} = \frac{ae^{x} - a + b^{e}}{e^{x} - 1} = \frac{(a + b)e^{x} - a}{e^{x} - 1}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a=-2 \end{cases} نحصل على  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$  بالمطابقة مع:$$

$$f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$$
 :أي 
$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

لدينا:

 $]0;+\infty[$  الدالة  $x\mapsto 2$  أصلية للدالة  $x\mapsto 2$  أصلية للدالة  $x\mapsto e^x$  على  $x\mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$  أصلية للدالة  $x\mapsto \ln(e^x-1)$  على المجال  $[0;+\infty[$ 

f منه:  $F(x) = 2x - \ln(e^x - 1)$  منه:  $f(x) = 2x - \ln(e^x - 1)$ 

#### الدرين 03

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل  $u \times u^n$ 

$$I = IR : f(x) = (x-1)^4$$
 (1)

$$I = IR : f(x) = 3(3x+4)^5$$
 (2)

$$I = IR : f(x) = e^{x}(e^{x} - 1)^{2}$$
 (3)

$$I = IR : f(x) = x^{2}(x^{3} + 1)^{4} (4$$

$$I = ]0; +\infty[: f(x) = \frac{1}{r} [\ln(x)]^2]$$
 (5)

$$I = IR : f(x) = 2\cos x \sin^2 x$$
 (6)

#### حل التمرين 03

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن : الدالة الأصلية للدالة u'.u'' هي الدالة :

$$(n \neq -1)$$
 حيث  $\frac{1}{n+1} . u^{n+1}$ 

$$u'(x) = 1$$
: نضع  $u(x) = x - 1$  نضع (1

$$f(x) = (x-1)^4 = u'(x) \times [u(x)]^4$$
 إذن:

ومنه: الدالة 
$$\frac{1}{4+1}[u(x)]^4$$
 هي دالة أصلية

ل 
$$F(x) = \frac{1}{5}(x-1)^5 + c$$
 اي:  $x \mapsto (x-1)^4$  هي مجموعة

. f الدوال الأصلية للدالة

$$u'(x) = 3$$
 نضع:  $u(x) = 3x + 4$  نضع: (2

$$f(x) = 3(3x+4)^5 = u'(x)[u(x)]^5$$
:

إذن: الدالة أصلية 
$$x\mapsto \frac{1}{6}[u(x)]^6$$
 هي دالة أصلية

ل 
$$F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^6c$$
 :  $f$  أي  $f$  المدالة أصلية للدالة  $f$ 

$$u'(x) = e^x$$
 :نضع (3 نضع (3 نضع ) اذن

$$f(x) = e^{x} (e^{x} - 1)^{2} = u'(x) [u(x)]^{2}$$
:

إذن:الدالة أصلية 
$$x \mapsto \frac{1}{3} [u(x)]^3$$
 هي دالة أصلية

$$F(x) = \frac{1}{3} (e^x - 1)^3 + c$$
 : ل $[u(x)]^2$  هي

f جموعة الدوال أصلية للدالة

(4) نضع: 
$$u'(x) = 3x^2$$
 منه:  $u(x) = x^3 + 1$  نضع:  $f(x) = x^2(x^3 + 1)^4 = \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$  إذن: الدالة  $\frac{1}{5}[u(x)]^2$  هي دالة أصلية ل

$$F(x) = \frac{1}{15} (x^3 + 1)^5 + c : \text{cit} x \mapsto \frac{1}{3} u'(x) [u(x)]^4$$

f هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$
 : نضع  $u(x) = \ln x$  إذن  $u(x) = \ln x$  نضع (5  $f(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2 = u'(x) [u(x)]^2$  منه:

 $x \mapsto u'(x) [u(x)]^2$ إذن:  $x \mapsto x \mapsto \frac{1}{3} [u(x)]^3$  إذن

.  $f(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$  أي:  $f(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$ 

 $u'(x) = \cos x$  : نضع  $u(x) = \sin x$  نضع (6

 $f(x) = 2\cos x \sin^2 x = 2u'(x) [u(x)]^2$  إذن:

منه: الدالة  $[u(x)]^3$  منه: الدالة

لـ  $F(x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$  أي:  $x \mapsto 2u'(x) \left[u(x)\right]^2$  هي موعة الدوال أصلية للدالة f.

#### لتمرين 04

 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$  بـ ]0;1 بـ الدالة المعرفة على ]0;1

[0,1]عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل x من a

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{\left(x-1\right)^2}$$

يانتج دالة أصلية f للدالة f على المجال f أf عنق (2

$$F(\frac{1}{2}) = 6$$

#### حل التمرين 04:

 $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$  ان من أجل كل x من ]0;1[ لدينا:

$$=\frac{a(x^2-2x+1)+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

#### حل التمرين 05

$$a+b=0$$
 $-2a=2$ 
 $a=-1$ 
 $b=1$ 
 $a=-1$ 
 $b=-a$ 
 $a=-1$ 
 $a=-1$ 

#### سرير 05:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - 1)^3} \cdot ]1; +\infty[ x + \infty ]$$

$$1; +\infty[ x + \infty ]$$

$$1; +\infty[ x + \infty ]$$

$$2; +\infty[ x + \infty ]$$

$$3; +\infty[ x + \infty ]$$

$$4; +\infty[ x + \infty ]$$

$$5; +\infty[ x + \infty ]$$

$$4; +\infty[ x +$$

 $]1;+\infty[$  على f استنج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على ا

F(0)=1 :ققق f للدالة f تحقق المالة أصلية

 $_{A} \mapsto (x-2) \ln |x-2| - (x+2) \ln |x+2| + c$  أي الدالة أصلة للدالة / حيث ( ) عدد حقيقي ثابت).

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال  $\frac{u(x)}{[u(x)]^n}$ 

عين الدوال الأصلية للدالة / في كل حالة من الحالات

$$I = ]2; +\infty[: f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} (1$$

$$I = ]-1; +\infty[: f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$
 (2)

$$I = ]1/2; +\infty[: f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3} (3$$

$$I = ]1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} (4$$

$$I = IR : f(x) = \frac{ex}{(1+ex)^2}$$
 (5)

$$I = IR : f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$$
 (6)

$$I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^4}$$
 (7)

$$I = ]-\pi/2; \pi/2[ : f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$
 (8)

$$I = ]0; +\infty[: f(x) = \frac{-e^x - 2}{(e^x + 2x)^2}]$$

$$I = [1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^2}] (10)$$

#### حل التعريين 07:

u'(x) = 1 :نضع (2 = u(x) = x - 2 نضع (1

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} = 5(\frac{u'(x)}{[u(x)]^7})$$
:  $|\dot{u}(x)|$ 

منه: الدالة أصلية ل $x \mapsto 5(\frac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}}$  دالة أصلية ل $x \mapsto 5\frac{u'(x)}{[u(x)]^7}$ 

f هي الدالة الأصلية  $F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + c$ :

F(0) = 1 :ققق f للدالة f غقق (3

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = 1/2$$

ومنه:  $F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{2}$  هي الدالة

الأصلية المطلوبة .

 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$  دالة معرفة على  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  بـ  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 

 $a;+\infty[$  عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على =a

$$g(x) = (x+a) \ln |x+a| - x - x$$

حيث ( a عدد حقيقي ثابت).

:  $x\mapsto \ln |x+a|$  استنتج دَالة أصلية للدالة (2

 $]-a;+\infty[$   $\downarrow E h$ 

. ]2;+ $\infty$ [ على ] $\infty$ +3 (1)

#### حل التمرين 06:

$$g'(x) = \ln|x+a| + (x+a) \times \frac{1}{x+a} - 1$$
 (1)  
= \ln |x+1| + 1 - 1 = \ln |x+a|

g'(x) = h(x) أي  $g'(x) = \ln|x + a|$  (2) لدينا:

 $[-a;+\infty]$  هي دالة أصلية له h على g

 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \ln |x-2| - \ln |x+2|$  (3)

حسب السؤال (1) فإن:

 $x\mapsto \ln|x-2|$  الدالة  $x\mapsto (x-2)\ln|x-2|-x$  أصلية ل  $x \mapsto \ln|x+2|$  الدالة  $x \mapsto (x+2) \ln|x+2| - x$  أصلية ل

 $x \mapsto (x-2)\ln|x-2| - x - [(x+2)\ln|x+2| - x]$ 

 $x \mapsto \ln|x-2|-\ln|x+2|$  أصلية للدالة:

150

$$u'(x) = 3x^{2} : \text{wis} \ u(x) = x^{3} + 1 : \text{wis} \ (7)$$

$$f(x) = \frac{6x^{2}}{(x^{3} + 1)^{4}} = 2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{4}}) : \text{wis}$$

$$x \mapsto 2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{4}}) \text{wis} \ x \mapsto 2(\frac{-1}{3[u(x)]^{3}}) : \text{wis}$$

$$f(x) = \frac{-2}{3(x^{3} + 1)} + c : \text{wis}$$

$$u'(x) = -\sin x : \text{wis} \ u(x) = \cos x \text{wis} \ (8$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^{3} x} = -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{3}}) : \text{wis}$$

$$x \mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{3}}) \text{wis} \ F(x) = \frac{1}{2(u(x))^{2}} + c : \text{wis}$$

$$f(x) = \frac{e^{x} + 2}{(e^{x} + 2x)^{2}} = -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{2}}) : \text{wis}$$

$$f(x) = \frac{-e^{x} - 2}{(e^{x} + 2x)^{2}} = -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{2}}) : \text{wis}$$

$$x \mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{2}}) \text{wis} \ x \mapsto -(\frac{-1}{u(x)}) : \text{wis}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{x} + 2x} + c : \text{wis}$$

$$u'(x) = 1/x \text{wis} \ u(x) = \ln x + 2 : \text{wis}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^{2}} = \frac{1/x}{(\ln x + 2)^{2}} = \frac{u'(x)}{[u(x)]^{2}} : \text{wis}$$

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^{2}} \text{wish it lith if léouls it lettif } x \mapsto \frac{-1}{u(x)} \text{wish it lettif if léouls it lettif } f$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x + 2} \text{wish it lettif if léouls it lettif } f$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x + 2} \text{wish it lettif if léouls it lettif } f$$

$$f(x) = \frac{1}{(u(x))^{2}} \text{wish it lettif if léouls it lettif } f$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x + 2} \text{wish it lettif if léouls it lettif } f$$

#### التمرين 08:

 $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$  باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$  عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال f

 $x \mapsto \frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}$  الدالة  $x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$  هي دالة أصلية ل

إذن:  $F(x) = \frac{-1}{r^2 - r + 1} + c$  هي الدالة الأصلية للدالة

$$u'(x) = -1$$
 :نضع:  $u(x) = 2 - x$  افن: (4

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + 3 = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} + 3$$
:

إذن: 
$$F(x) = -2 - \sqrt{2-x} + 3x + c$$
 إذن

. f للدالة

$$u'(x) = e^x$$
: نضع:  $u(x) = e^x - 1$ : نضع (5

$$f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
:

$$F(x) = 2\left(2\sqrt{e^x - 1}\right) + c$$
 إذن:

f أي:  $F(x) = 4\sqrt{e^x - 1} + c$  هي الدالة الأصلية للدالة

$$u'(x) = 1$$
: منه:  $u(x) = x - 3$  نضع: (6

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
 إذن:

$$F(x) = 2(2\sqrt{x}) - 2(2\sqrt{u(x)}) + c$$
:

أي: 
$$F(x) = 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x-3} + c$$
 هي الدالة الأصلية

f للدالة

$$u'(x) = \cos x$$
 نضع:  $u(x) = \sin x$  نضع: (7

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
: إذن

f منه:  $F(x) = 2\sqrt{\sin x} + c$  منه:

$$u'(x) = -2\sin x$$
 نضع:  $u(x) = 2\cos x + 3$  نضع: (8

$$\sin x = \frac{-1}{2}u'(x) :$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \right)$$
: إذن:

$$F(x) = -\frac{1}{2}(2\sqrt{2\cos x + 3} + c)$$

أي: 
$$F(x) = -\sqrt{2\cos x + 3} + c$$
 هي الدالة الأصلية للدالة  $f$ 

$$I = ]1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}]$$
 (1)

$$I = ]2; +\infty[: f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}]$$
 (2)

$$I = ]3; +\infty[: f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$
 (3)

$$I = ]-\infty; 2[: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$$
 (4)

$$I = ]0; +\infty[: f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}}]$$
 (5)

$$I = ]3; +\infty[: f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}}]$$
 (6)

$$I = ]0; \pi[: f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}]$$
 (7)

$$I = IR: f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}}$$
 (8)

$$I = ]0; +\infty[: f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 - x^2}}$$
 (9)

#### حل التمرين 08:

$$u'(x) = 1$$
: نضع:  $u(x) = x - 1$  نضع: (1

$$F(x) = 2\sqrt{x-1} + c$$
:منه:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ 

f الدالة الأصلية للدالة

$$u'(x) = 2x$$
 :نضع  $u(x) = x^2 - 4$  نضع (2

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
 :424

. 
$$f$$
 هي الدالة الأصلية للدالة  $F(x) = 2\sqrt{x^2 - 4} + c$  إذن:

$$u'(x) = 2x - 1$$
 : نضع (3 نضع نصع نصع (3 نضع نصع )

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
:

إذن: 
$$F(x) = 2\sqrt{x^2 - x - 6} + c$$
 هي الدالة الأصلية للدالة .  $f$ 

 $u'(x) = 3x^{2} + 2x : 0 \text{ if } u(x) = x^{3} + x^{2} \text{ if } 0$   $f(x) = \frac{3x^{2} + 2x}{\sqrt{x^{3} + x^{2}}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ if } 0$ 

#### 09

 $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$  به الله معرفة على f الله معرفة على f "(x) برا" ثم f''(x) ثم (1) احسب (1) خقق أن من أجل كل f من  $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$  (3) استنج دالة أصلية للدالة  $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$ 

#### حل التمرين 09

$$f'(x) = (4x-7)e^{x} + (ex^{2}-7x+5)e^{x}$$

$$= (2x^{2}-7x+5+4x-7)e^{x}$$

$$= (2x^{2}-3x-2)e^{x}$$

$$f''(x) = (4x-3)e^{x} + (2ex^{2}-3x-2)e^{x}$$

$$= (2x^{2}+x-5)e^{x}$$

$$: (2x^{2}+x-5)e^{x}$$

$$: (3x^{2}+x^$$

$$4e^{x}+2f'(x)-f''(x) = (4+4x^{2}-6x-4-2x^{2}-x+5)e^{x}$$
$$= (2x^{2}-7x+5)e^{x} = f(x)$$

$$f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$$
 حسب السؤال فإن:  $x \mapsto 4e^x$  أصلية ل $x \mapsto 4e^x$ 

$$x \mapsto f'(x)$$
 أصلية ل $x \mapsto f(x)$  أصلية ال

$$x \mapsto f''(x)$$
 أصلية ل $x \mapsto f'(x)$ 

$$f$$
 أصلية ل $x\mapsto 4e^x+2f(x)-f'(x)+c$  أصلية لأ أي الدالة :

$$x \mapsto 4e^x + 2(2x^2 - 7x + 5)e^x - (2x^2 - 3x - 2)e^x + c$$
 أصلية للدالة  $f$  أي الدالة :

$$x \mapsto (4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^{x+c}$$

$$|x\mapsto (2x^2-11x+16)e^x+c$$
 أصلية للدالة  $f$  أي الدالة  $f$  أصلية للدالة  $f$ 

#### التمرين 10

 $f(x) = \cos^3 x$  به IR دالة معرفة على f به  $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$  ثم إستنتج دالة أصلية للدالة  $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$ .

#### حل التمرين 10

: IR من أجل كل x من

$$\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x)$$
$$= \cos x (\cos^2 x)$$
$$= \cos^3 x = f(x)$$

 $x \mapsto \cos x$  أصلية ل $x \mapsto \sin x$  الدالة

 $x\mapsto \cos x\sin^2 x$  أصلية لـ  $x\mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$  أصلية لـ  $x\mapsto \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$  إذن: الدالة  $x\mapsto \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$  هي دالة أصلية للدالة  $x\mapsto \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$ 

#### التمرين 11:

#### حل التمريين 11:

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$
 $f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x$ 
 $f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x$ 
 $f''(x) = -2\sin x - f(x)$ :
 $f''(x) + f(x) = -2\sin x$ 
 $f''(x) + f(x) = -2\sin x$ 
 $f''(x) + f(x) = -2\sin x$ 
 $f(x) = f''(x) - 2\sin x$ 
 $f(x) = f''(x) - 2\sin x$ 
 $f(x) = -f''(x) - 2\cos x + c$ 
 $f(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$ 
 $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$ 
 $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$ 
 $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$ 
 $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$ 

f أي:  $F(x) = \cos x + x \sin x + c$  أي:

$$\int_{1}^{\epsilon} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{1}^{\epsilon} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln^{2} x\right]_{1}^{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left(\ln^{2} e - \ln^{2} 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln^{2} x}{x} dx = \int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln^{2} x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \ln^{3} x\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \left(\ln^{3} e - \ln^{3} 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln^{3} x\right) dx = \left[\frac{1}{4} \ln^{4} x\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \left(\ln^{4} e - \ln^{4} 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(x+1-\frac{1}{x+2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2+1-\ln(1+2)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot (-1)^2-1-\ln(-1+2)\right)$$

$$= 2-\ln 3$$
(6)

#### التمرين 12 :

$$\int_{1}^{3} (x^{3} + 2x^{2} + 1) dx (1 : \frac{\pi}{2}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \sin^{2} x) dx (2 + \frac{\ln x}{x}) dx (3 + \frac{\ln x}{x}) dx (4 + \frac{e}{1} (\ln x)^{3} dx (5 + \frac{1}{x}) dx (6 + \frac{1}{x^{2}} (\ln x)^{3} dx (6 + \frac{1}{x^{2}} (\ln x)^{3} dx (7 + \frac{1}{x^{2}} (\ln x)^{3} dx (1 + \frac{1}{x^{2}} (\ln$$

#### حل التمرين 12

$$\int_{1}^{3} (x^{3} + 2x^{2} + 1) dx = \left[ \frac{1}{4} x^{4} + \frac{2}{3} x^{3} + x \right]_{1}^{3}$$
 (1)
$$= \left( \frac{1}{4} (3)^{4} + \frac{2}{3} (3)^{3} + 3 \right) - \left( \frac{1}{4} (1)^{4} + \frac{2}{3} (1)^{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{165}{4} - \frac{23}{12} = \frac{472}{12} = \frac{118}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} (\cos x \cdot \sin^{2} x) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin^{3} x \right]^{\frac{\pi}{2}}$$
 (2)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \sin^{2} x) dx = \left[ \frac{1}{3} \sin^{3} x \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left( \frac{1}{3} \sin^{3} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left( \frac{1}{3} \sin^{3} (0) \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$
(2)

$$u'(x) = 1 v(x) = \sin x v'(x) = \cos x \int_{0}^{\pi} x \cos x dx = \int_{0}^{\pi} u(x).v'(x) dx = [u(x).v(x)]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} u'(x)v(x) dx = [x \sin x]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \sin x dx = \pi \sin \pi - 0[-\cos x]_{0}^{\pi} = -(-\cos \pi + \cos 0) = -2 
$$u'(x) = 1 v(x) = e^{x} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} u(x) = x - 2 v(x) = e^{x} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \begin{cases} v'(x) = e^{x} \\ \end{cases} \\ v'(x) = e^{x}$$$$

ملاحظة: الدالة  $t \mapsto t \ln t - t$  هي دالة أصلية للدالة  $t \mapsto t \ln t$  على المجال  $t \mapsto t \ln t$ 

#### 14

$$\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} : x$$
 بین أن من أجل كل عدد حقیقي (1) بین أن من أجل كل عدد حقیقي (2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب (2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب

$$\int_{1}^{2} \frac{x^{4} + x^{3} + x^{2} + x}{x^{2}} dx$$

$$= \int_{1}^{2} \left( x^{2} + x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x^{3} + \frac{1}{2} x^{2} + x + \ln|x| \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{29}{6} - \ln 2$$

#### الدرين 13

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية:  $\int_{1}^{e} x \ln x dx$  (1  $\int_{0}^{\pi} x \cos x dx$  (2  $\int_{1}^{2} (x-2)e^{x} dx$  (3  $F(x) = \int_{1}^{x} (\ln t)^{2} dt$  (4

#### حل التمرين 13 :

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{2}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2}x^{2}$$

$$\vdots \vdots v'(x) = x$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^{2} \ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^{2} \ln x\right]_{1}^{e} - \frac{1}{2}\int_{1}^{e} x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2} - 0\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{e^{2}}{2} - \left(\frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^{2} + 1}{4}$$

#### حار التعريين 15

a=0-8=1 [0.1] لندرس إشارة الدالة f على المجال (1.1) =8-9=8

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$
:\(\frac{3}{2}\)

:aia

إذن: على المجال [0:1] المنحنى (C) فوق محور الفواصل (f(x) ≥ 0) إذن:

$$S = \int_{0}^{1} f(x) dx = \int_{0}^{1} (x^{2} - 3x + 2) dx$$
$$= \left[ \frac{1}{3} x^{3} - \frac{3}{2} x^{2} + 2x \right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}$$

 $(x-1)e^{x} \le 0$  : غلى المجال [0;1] لدينا  $0 \ge 1 - 1 \le 0$  اذن:  $0 \le 1 - 1 \le 0$  على المجال  $e^{x} > 0$  غلى المجال  $e^{x} > 0$  غلى المجال أن

$$S = \int_{0}^{1} -f(x) dx = \int_{1}^{0} (x-1) e^{x} dx$$

نضع:  $\alpha = \int_1^0 (x-1)e^x dx$  نضع:

$$\alpha = [(x-1)e^x]_1^0 - \int_1^0 e^x dx$$
 :

$$\alpha = -e^0 - 0 - \left[e^{\lambda}\right]_1^0 : \emptyset$$

$$\alpha = -1 - (1 - e)$$
 : في

#### حل التمرين 14:

1) من أجل كل x من IR)

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{e^{x}}{e^{x}} \left( \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \right) = \frac{1}{1+e^{x}}$$

$$u(x) = x$$

$$v'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$id x = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$id x = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$id x = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = \frac{-1}{e^x + 1}$$
 : نذن

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(e^x + 1\right)^2} dx = \left[\frac{-x}{e^x + 1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e + 1} - 0 - \int_0^1 \frac{-1}{e^x + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e + 1} - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e + 1} - \left[\ln(e^{-x} + 1)\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{e+1} - \left[ \ln \left( \frac{1}{e} + 1 \right) - \ln(1+1) \right] = \frac{-1}{e+1} - \ln \left( \frac{1+e}{2e} \right)$$

#### القبرين 15

عيث [0;1] منحى الدالة f على المجال (C)

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل على المجال [0,1].

(C) منحنى الدالة f على المجال (C) حيث (2

$$f(x) = (x-1)e^x$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل على المجال [0:1]

#### العربي

: حيث  $D = R - \{-1\}$  حيث f  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$   $(o; \vec{i}; \vec{j})$   $(o; \vec{i}; \vec{j})$   $(o; \vec{i}; \vec{j})$   $(c_f)$   $(c_f)$  (

- $(C_f)$ مستقيم معادلته y=x-1 حدد وضعية بالنسبة لـ  $(\Delta)$  .
- lpha>1 عدد حقیقی ثابت حیث lpha>1 أحسب مساحة lpha>1 الحيز من المستوى المحدد بـ  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  و المستقيمين  $lpha=\alpha$  و  $lpha=\alpha$  ثم حساب نهاية A(lpha) عند  $lpha=\alpha$

#### حل التمريين 16

$$x-1+\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)^2+4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+2x+1)+4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3+2x^2+x-x^2-2x-x+4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3+x^2-2x+4}{(x+1)^2} = f(x)$$

(2) تحدید وضعیة  $(C_f)$  بالنسبة لـ ( $\Delta$ ) : (ندرس إشارة  $f(x) - y = \frac{4}{(x+1)^2}$  ) لدینا : (f(x) - y) یقع فوق ( $\Delta$ ) دومنه ( $\Delta$ ) یقع فوق ( $\Delta$ ) یقی نام در از را نام در از را

(3) حساب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ  $(C_{i})$  و  $(\Delta)$  و  $(\Delta)$  و المستقيمين 1 = 1 و (1 - 1) حيث (1 - 1) .

$$A(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} [f(x) - y] dx = \int_{0}^{\alpha} \left(\frac{4}{(x+1)^{2}}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{4}{x+1}\right]_{0}^{\alpha} = \left(-\frac{4}{(\alpha+1)}\right) - \left(-\frac{4}{2}\right)$$
$$= -\frac{4}{\alpha+1} + 2 \quad (u.s)$$

#### 17

/ دالة عددية معرفة على (1:3 - R - { كا يلي :

$$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

1) أحسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة تعريفها ،  $c_{f}$  ألم استنتج معادلات المستقيات المقاربة لـ  $c_{f}$  .

- . f واستنتج اتجاه تغیر الداله f'(x)
  - 3) أنشئ جدول تغيرات 🕽 .
- 4) أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1
  - 5) عين إحداثيات نقط تقاطع (Cf) منحنى الدالة f مع عاور الإحداثيات .
    - 6) أنشئ (T) و (Cf).
  - x عين العددين الحقيقيين  $\alpha$ و  $\beta$  بحيث من أجل كل  $\alpha$

: R - {-1;3}

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

.  $\beta$ نم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال  $\beta$ 

8) أحسب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (Cf) و محور الفواصل والمستقيمات ذات المعادلات  $x = \frac{7}{2}$  .

#### إشارة (x) f'(x)

| i., i.,            | - (m) | -1 | 2  | 3     | 5 | + 00 |
|--------------------|-------|----|----|-------|---|------|
| $-2x^2 + 14x - 20$ | Temp. | -  | 0. | + +   | 0 | -    |
| إشارة المقام       | + (   | +  |    | + 0 + |   | +    |
| f'(x) إشارة        | -     | -  | 0  | +   + | 0 | _    |

:f تغيرات الدالة

- $x \in [2:3[\bigcup ]3:5]$  متزایدة تماما لما
- $x \in ]-\infty;-1[U]-1;2]U[5;+\infty[$  المناقصة تماما لما f
  - : f الدالة f

| نیم ۲ | - 500 — | 1 2               |       | 3 ! | 5 +∞          |
|-------|---------|-------------------|-------|-----|---------------|
| f'(x) | -       | - 0               | +     | + 0 | > -           |
| f(x)  | 0       | + <sup>∞</sup> /1 | , + ∞ |     | $\frac{1}{4}$ |

عند النقطة ذات  $(C_f)$  معادلة الماس (T) للمنحنى (الفاصلة 1)

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2} , f(1) = -\frac{5}{4} : 2$$

$$y = \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{5}{4} : 3$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{4} : (T) \text{ and the left}$$

$$f(0) = \frac{7}{3} : (Cf) \cap (yy')$$

 $(Cf)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{7}{3}\right)\right\}:$ 

#### حل التمرين 17:

1) حساب النهايات:

$$D_{f} = ]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^{2}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^{2}} = 0$$

y=0 منه : ( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب معادلته

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -9 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^+ \end{pmatrix} \quad \forall y$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -9 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^- \end{pmatrix}$$

x=-1 ومنه:  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -1 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^- \end{pmatrix}$$
 ڏن

$$\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -1 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^+ \end{pmatrix}$$
 الأن

x=3 ومنه:  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته

2) حساب المشتقة f: قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة f:

$$f'(x) = \frac{(2)(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2)(2x - 7)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 6 - 4x^2 + 18x - 14}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 14x - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 14x - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$
 و  $x + 1 > 0$  و  $x - 3 > 0$   
 $x = 3; + \infty$  [ و منه : من أجل كل  $|x| = |x| =$ 

$$x \to \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4} \ln \frac{x+1}{x-3}$$
: فالدالة : والة أصلية للدالة  $f$  في المجال ]3;+ $\infty$ [

$$F(X) = \ln(x^{2} - 2x - 3) + \frac{5}{4} \ln \frac{x+1}{x-3}$$

$$S = \int_{7}^{5} f(x) dx = [F(x)]_{7}^{5} (us) : (8)$$

$$S = \left[\ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4}\ln\frac{x + 1}{x - 3}\right]_{\frac{7}{2}}^{5}(us) : e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\ln 12 + \frac{5}{4}\ln 3 - \ln\frac{9}{4} - \frac{5}{4}\ln 9\right)(us)$$

$$= (4\ln 2 - \frac{9}{4}\ln 3) us$$

#### التمرين 18

|x+1| = x+1

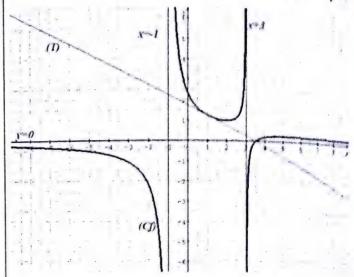
ا) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على  $R-\{-1\}$  كها يلي :  $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$  و  $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$  بياني فيالمستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس g(i;j) .

$$f(x) = 0 : (Cf) \cap (xf)$$

$$x = \frac{7}{2} : \text{cf } 2x - 7 \approx 0$$

$$. (Cf) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{7}{2}; 0\right) \right\} : \epsilon_{\bullet},$$

: (cj) اينا، (6



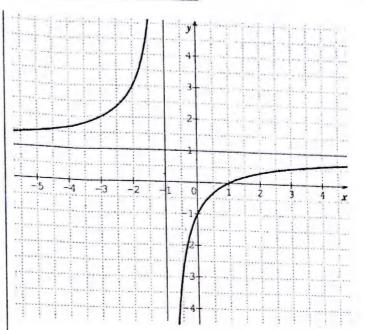
$$: x \in D_f$$
 نعين  $\alpha : \beta \circ \alpha$  نعين (7

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$
$$= \frac{(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - 3\alpha - 2)}{x^2 - 2x - 3}$$
$$= \frac{2x - 2 + \alpha(x-3) + \beta(x+1)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(\alpha + \beta + 2 = 2; \beta - 3\alpha - 2 = -7)$$
 : بالمطابقة

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{4} \\ \beta = \frac{-5}{4} \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 2 \\ \beta - 3\alpha - 2 = -7 \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - 3\alpha = -5 \end{cases}; \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 4\beta = -5 \end{cases};$$

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{5}{4(x-3)}$$



- أ. شكل جدول تغيرات الدالة g.
- g(x) > 0 بيانيا المتراجحة
- 0 < g(x) < 1 ج. عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها
  - $]1;+\infty[$  المعرفة على المجال f المعرفة على المجال أ. إ المعرفة على المجال المعرفة المعرفة على المحالة المعرفة على المحالة ا

و 
$$(C_f)$$
 المنحنى الممثل لها  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; i; \vec{j})$ .

- 1. أحسب f(x) و  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$  ، فسر النتيجتين مندسيا.
- $:]1;+\infty[$  الجال عدد حقيقي x من المجال. 2

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. أحسب f'(x) و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ. باستعمال الجزء 1) السؤال ج. عين إشارة العبارة

. ]l;+∞[ على المجال 
$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

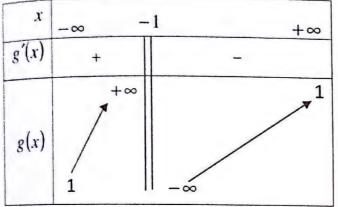
pprox عدد حقيقي. بين أن الدالة lpha

$$x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$$

 $[\alpha;+\infty[$  المجال ] ثم عين دالة أصلية للدالة  $[a;+\infty[$  على  $g(x)=1-\frac{2}{x+1}]$  المجال ]

#### حل التمريين 18

ا) أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة g :



g(x) > 0 بيانيا المتراجحة g(x) > 0

الحل البياني للمتراجحة g(x) > 0 هو:

 $x \in [-\infty; -1] \cup [1; +\infty]$ 

0 < g(x) < 1 ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها

 $x \in ]1;+\infty[ : U \ 0 < g(x) < 1$ من البيان

 $]1;+\infty[$  المعرفة على المجال f المعرفة على المجال التكن الدالة المعرفة على المجال المحرفة على المحرفة المحر

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1) حساب  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$  و تفسیر

النتيجتين هندسيا :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x-1}{x+1} + \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right] = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left[ \frac{x-1}{x+1} + \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right] = -\infty$$

التحدير البياني: 1= 1 مستقيم مقارب عمودي يوازي (١٣٢) بحوار (∞-).

ا = ال منظيم مقارب أفقي يوازي (xx').

2) أراثيات أنه من أجل كل عدد حقيقي ١٠ من المجال

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
:  $h:+\infty$ 

الله عند الإشتقاق على المجال ]∞+: [ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

. حساب <sup>مم</sup>ر و دراسة إشارتها:

المالة أر قابلة للإشتقاق على المجال ]٠٠٠: [[ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} \frac{2(x-1) + 2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$
$$= \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

x-1>0 : فراسة إشارة المُشتقة : بها أن 1>1 فإن : 0<1-1

: 
$$|1,+\infty|$$
 or  $|x| = 0$  or  $|x| = 0$  or  $|x| = 0$ 

0 < (x) كرو بالتالي الدالة كر منزايدة تماما على المجال}∞+.ا[. جلول تغيرات الدالة كر :

$$0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$
 : لدينا: 1 > 1 ما سبق من أجل 1 (3

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$$
: و بالتالي إشارة العبارة سالية.  $a \in [0,1]$  لل  $\ln a < 0$  و بالتالي إشارة العبارة سالية.

ب. إثبات أن الدالة 
$$x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$$
 هي  $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$  الدالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  على المجال  $x \mapsto \ln(x-\alpha) - x$  وعليه الدالة  $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  بوضع :  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$  بوضع  $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ 

الدالة 
$$k$$
 معرفة على المجال  $lpha;+\infty[$  و قابلة للإشتقاق

عليه و:  

$$k'(x) = \ln(x - \alpha) + (x - \alpha) \times \frac{1}{x - \alpha} - 1 = \ln(x - \alpha)$$

: 
$$g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$
 ج. التحقق أن

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$
 : لينا

: ]1;+ $\infty$ [ على المجال ] $+\infty$ [ على المجال ]

: دينا : 
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
 وعليه

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

عاسق لدينا:

دالة أصلية للدالة 
$$x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x$$

$$x \mapsto \ln(x-1)$$

دالة أصلية للدالة 
$$x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$$

$$x \mapsto \ln(x+1)$$

$$x \mapsto 1 - \frac{2}{x+1}$$
 دالة أصلية للدالة  $x \mapsto x - 2\ln(x+1)$ 

وعليه:

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$
$$-x - (x+1)\ln(x+1) + x$$

$$F(x) = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$
 : أي :  $f(x) = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$  مي دالة أصلية للدالة  $f(x) = x - (x+3)\ln(x+1)$ 

#### النعرين 19

f(x)=c'-cx-1 المعرفة على f(x)

(  $C_{j}$  ) تمثيلها البيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O;i;j) .

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ 

ب) أحسب f'(x) ثم أدرس إشارتها،

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f.

y = -ex - 1 (2)  $(\Delta)$  (a)  $(\Delta)$   $(\Delta)$ 

مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$  بجوار  $(-\infty)$ .

ب)أكتب معادلة للمستقيم (T) عماس المنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0.

]1,75;1,76 يين أن المعادلة f(x) = 0 تقبل في المجال  $\alpha$  حلا وحيدا  $\alpha$  .

د) ارسم المستقيمين ( $\Delta$ ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال  $[2,\infty]$ .

(3) أ) أحسب بدلالة  $\alpha$  المساحة  $\Lambda(\alpha)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما  $x=\alpha$  و x=0 .

$$\Lambda(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)ua : (ua) + (ua)$$
(  $ua$ ) اثبت أن  $ua$  (  $ua$ ) اثبت أن  $ua$  (  $ua$ )

#### حل التمرين 19:

: به R به المعرفة على R به بنتبر الدالة العددية  $f(x) = e^{x} - ex - 1$ 

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1.1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - ex - 1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

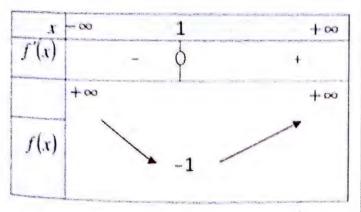
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty : 5Y$$

 $f'(x) = e^{x} + f'(x)$  و دراسة إشارتها : الدالة  $f'(x) = e^{x} + e^{x}$  اللاشتقاق على  $f'(x) = e^{x} + e^{x}$  و  $f'(x) = e^{x} + e^{x}$  دراسة إشارتها : f'(x) = 0 تعنى أن :  $f'(x) = e^{x} + e^{x}$ 

f'(x) > 0 . و بالتالي : 1 = 1 . و عليه . c' = c . لما 1 > 1 لما 1 > 1 . و بالتالي الدالة f متزايدة تماما و :

الدالة f'(x) < 0 لما 1 > 1 و بالتالي الدالة f'(x) < 0

: f المدالة f



y=-ex-1 ذو المعادلة  $(\Delta)$  أ. إثبات أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $(-\infty)$  :

لدينا:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \to \infty} (e^x - ex - 1 + ex + 1)$$

$$= 0$$

y = -ex - 1 و منه المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته

3. أ. حساب بدلالة a المساحة (a) للحير المستوي المحدد بالمتحلي (٢٠) و حامل محور الفواصل والمستضمين  $(A = \alpha \cdot A = 0)$  الله بين معادلتها  $\forall x \in ]0; \alpha[ \cup f(x) - y < 0 : 5][x]$  $A(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} [y - f(x)] dx = \int_{0}^{\alpha} (-e^{x} + ex + 1) dx$  $A(\alpha) = \left[ -e^x + \frac{e}{2}x^2 + x \right]_0^{\alpha}$  $A(\alpha) = \left[ -e^{\alpha} + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha \right] - \left( -e^{0} + \frac{e}{2}(0)^2 + 0 \right)$  $= \left[ -e^{\alpha} + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1 \right] ua$  $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)u\alpha$  : البات أن : ب  $e^{\alpha}$  -  $e^{\alpha}$  -  $e^{\alpha}$  - 1 = 0 : نان  $f(\alpha)$  = 0 نالب  $e^{\alpha} = e\alpha + 1$ ;  $A(\alpha) = \left(-e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1\right)u\alpha \quad \text{also}$  $A(\alpha) = \left(-e\alpha - 1 + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1\right)u\alpha$  $= \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)u\alpha$ 

مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار ٥٠٠. ب)كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C, ) في النقطة ذات الفاصلة 0:

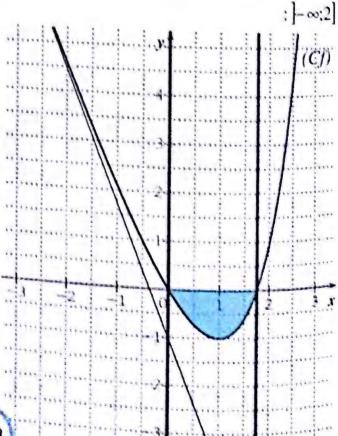
f'(0) = 1 - e و f(0) = 0 الدينا f'(0) = 1 - e و f(0) = 0 و عليه f'(0)(x - 0) + f(0) آي f'(x) = 0 و عليه f(x) = 0 البات أن المعادلة f(x) = 0 تقبل في المجال f(x) = 0 :

بهان الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $+\infty$ : 1 و المجال 1.75;1.76 1.75;1.76 فيان الدالة f مستمرة و متزايدة تماما عليه.

و سربيد الحرى : 1.75e - 1 = -0.0024 - 1.75e - 1.75e - 1 = -0.0024 من جهة الحرى : f (1.75) = e<sup>1.75</sup> - 1.76e - 1 = 0.028
و عليه 0 > f (1.76) × f (1.76) × σ (1.76) - حسب مبر هنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد من المجال ]1.75;1.76 ( يحقق :

$$f(x) = 0$$

د) رسم المستقيمين  $(\Delta)$  و (T) ثم المنحنى (C) على المجال

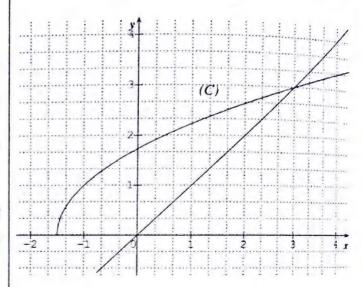


مواهیت عالوريا معالولي

# الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

 $u_0 = 1$  نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بحدّها الأول  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$  : n ومن أجل كل عدد طبيعي n



الدالة المعرفة على المجال  $-\frac{3}{2}$ ;+ $\infty$  لتكن h الدالة المعرفة على المجال 0

نه المستقيم ( $\Delta$ ) المستقيم البياني و ( $\Delta$ ) المستقيم  $y = \sqrt{2x+3}$  المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (أنظر الشكل أعلاه).

 $(u_n)$  ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر  $(u_n)$  وتقاربها.

- : n برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $0 < u_n < 3$ 
  - ( $u_n$ ) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية  $(u_n)$ .
- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة، ثم أحسب أن المتتالية  $(u_n)$

التمرين 02:

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb C$  المعادلة ذات المجهول  $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$  التالية:  $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ 
  - حل في ٢ هذه المعادلة.
  - ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $O(\vec{u};\vec{v})$  ،  $O(\vec{u};\vec{v})$  ،  $O(\vec{u};\vec{v})$  .  $O(\vec{u$ 
    - 🔞 نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها 🗴
      - : حيث Z' النقطة M' النقطة ( $z \neq 2-3i$ )
- النقط  $z'=\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$  لواحقها على الترتيب  $z'=\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$  لواحقها على الترتيب  $z_{E}=3i$  ,  $z_{D}=2-3i$  ,  $z_{C}=-2i$  القطعة [CD].
- أ- عبر عن المسافة 'OM بدلالة المسافتين CM و OM. استنتج أنه من أجل كل نقطة M من M فإن النقطة 'M تنتمي إلى دائرة M) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . تحقق أن M تنتمي إلى M).

التمرين 03: التمرين 03: الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:

، A(1;-2;5) والنقط 14x + 16y + 13z - 47 = 0.C(-1;3;1) ، B(2;2;-1)

- ا) تحقق أن النقط B,A و C ليست في استقامية.
   ب) يتن أن المستوي (ABC) هو (P).
  - جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).
- ا- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q)
   للقطعة [AB].

لتكن f الدالة المعرفة على المجال [0] حما يلي:  $f(x) = x + 5 + 6L \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 

المتعامد ( $C_{j}$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $0:\overline{i}:\overline{j}$ ).

- النتيجة هندسيا.  $\lim_{x \to 0} f(x)$  مندسيا.  $\lim_{x \to 0} f(x)$  ب- احسب  $\lim_{x \to 0} f(x)$  .

استنتج اتجاه تغيّر الدالة أم، ثم شكّل جدول تغيراتها.

- ر = 1 م السنفيم ( $\Delta$ ) الذي معادلة له 1 م 1 م 1 م 1 موار عدد مو مستقيم مقارب ماثل للمدحني ( $\Delta$ ) جوار عدد ب ادرس وضع المحنى ( $\Delta$ ) بالنسبة للمستقيم ( $\Delta$ )
- بن ان المعادلة α (۱) / تقبل حلين α و β حيث
   بن ان المعادلة α (۱) / تقبل حلين α و β حيث
   بن ان المعادلة α (۱) / قبل حلين α و β حيث
  - انشئ المنحنی (۲,) والمستقیم (۵).

بين أن  $\frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$  معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

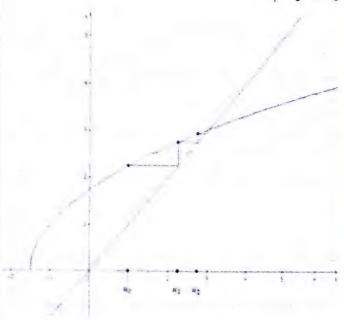
 $\psi^-$  بين أن المستقيم (AB) يعسى المنحنى  $(C_F)$  في نقطة  $M_0$  يطلب تعيين إحداثيتيها.

 $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$   $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$ .]-∞:0[ المجال المحالة المح

## حل الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

#### حل التعرين 01:

0 أ) الرسم:



ب) التخمين: (u, ) متتالية متزايدة ومتقاربة نحو العدد 3. 9 برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي 11 فإن:  $:0 < u_{*} < 3$ 

 $u_n < 3$  "الخاصية p(n) الخاصية

 $0 < u_0 < 3$  ومنه p(0) صحيحة: لدينا  $u_0 = 1$  ومنه إذن (0) محيحة.

n نفرض أن p(n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي np(n+1) ونبرهن أن p(n+1) صحيحة من أجل أي  $u_{n+1} < 3$  کل عدد طبیعي n أي:  $u_{n+1} < 3$ .

البرهان: لدينا:  $3 < u_n < 3$  بالضرب في العدد 2 نجد  $0 < 2u_n < 6$ 

> وبإضافة العدد 3 نجد 9 < 2 م + 3 ومنه  $0 < \sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9}$

p(n+1) إذن:  $0 < u_{n+1} < 3$  صحيحة من أجل کل عدد طبیعی ۱۱.

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد  $0 < u_n < 3 n$  : طبیعی

أ) دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (""):

دراسة إشارة الفرق ( $u_{n+1} - u_n$ ) : لدينا:  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n$ 

 $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n \times \frac{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$  $u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n + 3}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$ 

 $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$ 

خليل a+c=b فان حلا:  $-u_n^2 + 2u_n + 3$  فان حلا المعادلة (-1) المعادلة (-1) المعادلة (-1) و 3 وعليه:

 $-u_n^2 + 2u_n + 3 = -(u_n + 1)(u_n - 3)$ 

 $-u_n^2 + 2u_n + 3 = (u_n + 1)(3 - u_n)$  : آي

و بالتالي:  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(3 - u_n)}{\sqrt{2u_n + 3 + u_n}}$ 

الفرق (""،" ") من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. وبها أن  $(u_{n+1} - u_n)$  فإن إشارة الفرق  $(u_n + 1) > 0$  من إشارة ( ١١٠٥).

من جهة اخرى لدينا 3 $u_n < 3$  و عليه 3 $u_n > -1$  و بالتالي

 $(3-u_n)>0$ 

 $.OB = \sqrt{6}$  :ومنه

وعليه: OA = OB وبالتالي النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها  $\sqrt{6}$ .

أ- التعبير عن المسافة 'OM' بدلالة المسافتين CM وDM و DM

لدينا 
$$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$
 و بتطبيق خواص الطويلة:

$$|z'| = \frac{\left|3i\left(z+2i\right)\right|}{\left|z-2+3i\right|} : |z'| = \left|\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}\right|$$

$$|z'| = \frac{|3i||(z+2i)|}{|z-2+3i|}$$
:

 $|z+2i| = |z-(-2i)| = |z-z_C| = CM$  لدينا: 3|z+2i| = |z-(-2i)|

$$|z-2+3i| = |z-(2-3i)| = DM$$

 $.OM' = 3.\frac{CM}{DM}$  : أي

Mنإن النقطة Mمن ( $\Delta$ ) فإن النقطة M

تنتمي إلى دائرة  $(\gamma)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

 $(\Delta)$  بها أن  $(\Delta)$  محور القطعة [CD] و M نقطة من

 $OM' = 3.\frac{CM}{DM}$ : فإن CM = DM. من جهة أخرى لدينا:

و عليه: S = M' و بالتالي نستنتج أن النقطة M' تتمي

r=3 إلى دائرة  $(\gamma)$  مركزها O ونصف قطرها

 $(\gamma)$  النحقق أن E تنتمي إلى

OE=r و عليه  $OE=\left|z_{E}\right|=\left|3i\right|=3$  و عليه  $OE=\left|z_{E}\right|=\left|3i\right|=3$  و بالتالي النقطة E=0 تنتمي إلى E=0

حل التمرين 03:

أ) التحقق أن النقط B,A و C ليست في استقامية:

 $\overrightarrow{AC}$  (-2;5;-4) و  $\overrightarrow{AB}$  (1;4;-6) : لدينا

بها أن  $\overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{AC}$  فإن الشعاعان  $\overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{AC}$  غير

مرتبطان خطيا و بالتالي النقط B , A و C ليست في استقامبه

إذن  $(u_n) > 0$  و منه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

 $(u_n)$  استنتاج أن المتتالية متقاربة: بها أن  $(u_n)$  متتالية متزايدة

و محدودة من الأعلى بـ 8 فإن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

حساب النهاية  $u_n$  : بها أن  $u_n$  متتالية متقاربة فإن نهايتها موجودة و منتهية و لتكن العدد  $\ell$  .

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell \text{ فإن } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \text{ .}$$

$$\ell = \sqrt{2\ell + 3}$$
:

$$\begin{cases} \ell \ge 0 \\ \ell^2 - 2\ell + 3 = 0 \end{cases} : في \begin{cases} \ell \ge 0 \\ \ell^2 = 2\ell + 3 \end{cases} :$$
بالتربيع نجد :

.  $\lim_{n\to +\infty} u_n = 3$  : و بحل المعادلة نجد  $\ell \geq 0$  :  $\ell \geq 0$  التالي  $\ell \geq 0$  :  $\ell = -1$ 

حل التمرين 02: -

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول

$$(z \neq 2-3i$$
 حيث  $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$  : التالية:

$$z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$$
 تعنيأن:  $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ 

$$z^2 - 2z + 6 = 0$$
;  $z^2 - 2z + 3iz = 3iz - 6$ ;

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(6) = -20$$
 و بالتالي:

أي :  $\Delta = (2\sqrt{5}i)^2$  و بالتالي المعادلة تقبل حلين هما:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}i}{2} = 1 - \sqrt{5}i \\ z_2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}i}{2} = 1 + \sqrt{5}i \end{cases}$$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها: لدينا:

$$|z_A| = |1 + i\sqrt{5}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$$

 $.OA = \sqrt{6}$  ومنه:

$$|z_B| = |1 - i\sqrt{5}| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$$
:

2x + 8y - 12z + 21 = 0: (Q)ب - التحقق أن النقطة  $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$  تنتمي إلى المستوي  $2x_D + 8y_D - 12z_D + 21 = 0$ : لدينا  $2(-1)+8(-2)-12(\frac{1}{4})+21=0$ أي : 0=0+21=3+21=0 ومنه : 0=0 و بالتالي النقطة  $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$  تنتمي إلى المستوي  $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ . (AB) ج- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم المسافة بين النقطة Dو المستقيم (AB) هي الطول ID وعليه:  $d((\Delta);D) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + \left(0+2\right)^2 + \left(2-\frac{1}{4}\right)^2}$  $d\left((\Delta);D\right) = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{100 + 64 + 49}{16}}$  $d\left((\Delta);D\right) = \frac{\sqrt{213}}{4}$ حل التمرين 04: -

أ- حساب f(x)، ثم التفسير النتيجة هندسيا:  $\lim_{x \to 0} f(x)$  $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left| x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right| = -\infty$  $\left(\lim_{x \to 0} \left| 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right| = -\infty$  : گن )

ومنه المستقيم الذي معادلته x = 0 مستقيم مقارب عمودي. : اim f (x) ب- حساب

 $\left(\lim_{x\to\infty}(x+5)=-\infty\right)_{0}\left(\lim_{x\to\infty}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0\right)$ : بها آن

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[ x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty :$ فإن:

، ] $-\infty$ ,0[ بنبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من x

 $:f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$ 

(P) هو (ABC) هو (P): 14(1)+16(-2)+13(5)-47=14-32+65-47=0: الدينا وعليه النقطة A تنتمي إلى المستوي (P). من جهة أخرى: 14(2)+16(2)+13(-1)-47=28+32-13-47=0(P) وعليه النقطة B تنتمي إلى المستوي 14(-1)+16(3)+13(1)-47=-14+48+13-47=0وعليه النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) . ومنه المستوي (ABC) هو (P). (AB) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)نعتبر النقطة M(x;y;z) من المستقيم M(x;y;z) ومنه التمثيل  $x = \lambda + 1$  $x = 4\lambda - 2$  $z = -6\lambda + 5$ 

كذلك:

 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$  هو (AB) الوسيطي للمستقيم  $(\lambda \in \mathbb{R})$  وعليه التمثيل الوسيطي هو

 $\Theta$  أ- كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري  $\Theta$ :[AB] ishill

السنوي المحوري (Q) للقطعة [AB] شعاعه الناظمي هو القطعة القطعة منتصف القطعة  $\overline{AB}$  (1:4:-6)  $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ : Levil: [AB]

اي:  $\left(\frac{3}{2};0;2\right)$  . نعتبر النقطة  $M\left(x;y;z\right)$  من المستوي المعوري(Q) وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري

 $\overrightarrow{IM}$   $\overrightarrow{AB} = 0$  هي (Q) للقطعة

 $1(x-\frac{3}{2})+4(y-0)-6(z-2)=0$ ;

 $x - \frac{3}{2} + 4y - 6z + 12 = 0$ 

 $x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$ 

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال ]0;∞-[ و دالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 6 \cdot \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 + 6 \cdot \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 6}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$$
:

استنتاج اتجاه تغیرات الدالة f و تشکیل جدول تغیراتها: إشارة المشتقة من إشارة البسط  $x^2-x-6$  لأنه من أجل كل عدد حقیقي x

x(x-1) > 0 ]-∞;0[: من

x = -2 ومنه  $x^2 - x - 6 = 0$ 

وهو مقبول أو x = 3 وهو مرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال  $[2-;\infty-[$  و f متناقصة تماما على المجال [2;0-].

جدول التغيرات:

y = x + 5 أ- إثبات أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة x + 5 = 0 هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم (۵) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - (x+5) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - (x+5) \right] = \lim_{x \to -\infty} 6Ln \left( \frac{x}{x-1} \right) = Ln1 = 0$$

ومنه: المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة x = x + 5 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنی ( $C_f$ ) بجوار  $\infty$ .

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنی ( $\alpha$ ) والمستقيم ( $\alpha$ ): دراسة إشارة الفرق  $\alpha$  [ $\alpha$  ( $\alpha$  + 5)]: لدينا  $\alpha$  ( $\alpha$  + 5) = 6 $\alpha$   $\alpha$  المنحنى ( $\alpha$  + 5).

 $Ln\frac{x}{x-1} < Ln1$  سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: f(x) - (x+5) < 0 وبالتالي f(x) - (x+5) < 0 بقع قت المستقيم ( $\Delta$ ) من أجل كل x من المجال  $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x)^{-1} dx$ 

eta و  $\alpha$  يثبات أن المعادلة  $\alpha$  و  $\alpha$  يقبل حلّين  $\alpha$  و  $\alpha$  و اثبات أن المعادلة  $\alpha$  = 0 و  $\alpha$  = -3.5  $\alpha$  = -3.4 حيث  $\alpha$  = -3.5  $\alpha$ 

 $-\infty;-2$  لدينا الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال f مستمرة و المجال f مستمرة و المجال f مستمرة f فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه و $f(-3,4)\approx 0,053$  و  $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$ 

f(x)=0 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $\alpha < -3,5$  حيث:  $\alpha < -3,5$ 

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال

f فالدالة ]-1,1;-1 [ = ]-2;0 والمجال ]-2;0

 $f(-1,1)\approx 0.02$  مستمرة و رتيبة تماما عليه.و  $f(-1)\approx -0.158$  و

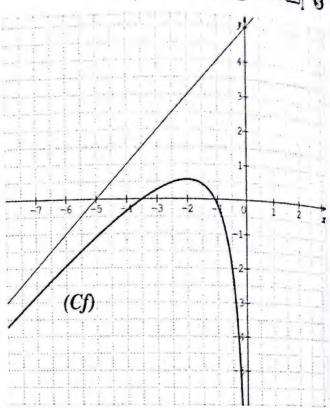
وبالتالي  $f(1) < f(1) \times f(1) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القبم المتوسطة المعادلة f(x) = 0 تقبل حل  $\beta$  حيث:

 $-1, 1 < \beta < -1$ 

 $\beta$  وعليه المعادلة  $\alpha$  وعليه المعادلة  $\alpha$  و f(x) = 0

حيث 3,4<-> م-1,1<β<-1 و 3,5<α<-3,4

 $(C_{f})$  والمستقيم ( $\Delta$ ): والمستقيم ( $\Delta$ )



 $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$  إثبات أن  $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$  المستقيم (AB):

(AB) نعتبر النقطة M(x,y) نقطة من المستقيم

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
 لدينا .  $\overline{AB} / / \overline{AM}$  : ومنه

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3-6Ln\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

أن: <u>AB</u> // AM

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1) = 0$$

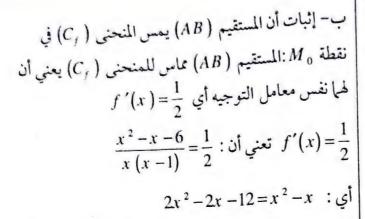
$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y - 3 - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم ( AB) هي:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$$



 $x^2-x-12=0$  وبالتالي:  $x^2-x-12=0$  بحل المعادلة  $x^2-x-12=0$  نجد x=-3 مقبول أو x=-3 هو مرفوض وبالتالي المستقيم نجد  $(C_f)$  عند النقطة (AB) ماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة (AB) .  $f(-3)=2+6Ln\frac{3}{4}$ 

g دالة معرفة على المجال g0; $\infty$ [ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6xLn\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6Ln(1-x)$$

: من أجل كل x من أجل كل x من أجل كل x من و دالة أصلية للدالة x

$$. g'(x) = f(x) ] - \infty; 0[$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال ]0;∞-[و:

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x \times \frac{-1}{(x-1)x} + 6\frac{-1}{1-x}$$

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{(x-1)} + \frac{-6}{1-x}$$

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{(x-1)} + \frac{6}{x-1}$$

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = f(x)$$

. ]-∞;0[ على المجال g دالة أصلية للدالة f على المجال

# الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول  $u_n = \frac{13}{4}$  ومن المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول

.  $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$  : n غدد طبيعي

- n برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي u.  $3 < u_n < 4$ .
  - ابین أنه من أجل كل عدد طبيعي الله عدد الله من أجل كل عدد طبيعي

$$.u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3 + u_n - 3}}$$

استنتج أن  $(u_n)$  متزايدة تماما.

- ق برر لماذا (u<sub>n</sub>) متقاربة.
- .  $v_n = In(u_n 3)$  بالمتتالية المعرفة على N بـ:  $(v_n)$

أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدّها الأول.

ب) أكتب كلا من  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $u_n$  ثم أحسب  $u_n$  .  $u_{n \to +\infty}$  .  $u_n$  خصب  $u_n$  عدد طبيعي :

 $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3) n$ 

.  $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{16}$  أكتب  $P_n$  بدلالة n ثم بيّن أن

التمرين 02:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ . C(1;-1;0) ، B(2;1;0) ، A(-1;0;1) نعتبر النقط

بين أن النقط B,A و C تعين مستويا.

يتن أن 2x - y +5z -3=0 هي معادلة ديكارتية

للمستوي (ABC).

0 و H نقطتان من الفضاء حيث:

 $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right) \circ D\left(2; -1; 3\right)$ 

(ABC) أ- بين أن النقطة D تنتمي إلى المستوي

D المنقطة H هي المسقط العمودي للنقطة H على المستوي (ABC).

ج- استنتج أن المستويين ( ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين 03:

المتغیر الحدود للمتغیر المرکب z حیث:

 $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ 

أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود P(z)

ب) جد العددين الحقيقيين lpha و eta بحيث من أجل كل

 $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)z$  : عدد مرکب

P(z) = 0 المعادلة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة P(z) = 0.

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس C, B, A المستوي المركب لواحقها C, B, A المستوي المركب لواحقها

على الترتيب:

 $z_c = 3 - i\sqrt{3}, z_B = 3 + i\sqrt{3}, z_A = 6$ 

أ) أكتب كلا من zc,zB,z, على الشكل الأسي.

ب) أكتب العدد المركب  $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$  على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

ج) استنج طبيعة المثلث ABC.

 $\sqrt{3}$  ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه .S.

ب) عبّن  $z_A$  لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه A' بيّن أن النقط A', A' في استقامية.

التمرين 04:  $g(x) = 1 - xe^x$  كما يلي:  $R(x) = 1 - xe^x$  الدالة المعرفة على  $R(x) = 1 - xe^x$ 

 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x)$ 

ادرس اتجاه تغیر الدالة g ، ثم شكّل جدول تغیراتها.

وحيدا  $\alpha$  على g(x) = 0 على المعادلة g(x) = 0 على المجال  $\alpha$ 

 $\mathbb{R}$  علی  $g\left(x
ight)$  ب- تحقق أن  $g\left(x
ight)$  مثم استنتج إشارة  $g\left(x
ight)$  علی

ا) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال [2;∞-[كما يلي:.

المستوي المستوي مثيلها البياني في المستوي  $(C_f) f(x) = (x-1)e^x - x - 1$  المسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- $\lim_{x\to\infty} f(x) \longrightarrow 0$
- لتكن ' f مشتقة الدالة f ، يتن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من  $[2;\infty-[$  فإن: (x)=-g(x) . f'(x)=-g(x) استنتج إشارة f'(x) على المجال  $[2;\infty-[$  ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- بيّن أن  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$  ، ثم استنتج حصر اللعدد  $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$  . (تدور النتائج إلى  $f(\alpha)$ ).
  - و أ- بيّن أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذا المعادلة y = -x 1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) بجوار  $\infty$ .

    ب- أدرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة إلى ( $\Delta$ ).
  - $x_2$  أ- بيّن أن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلّين  $x_1$  و  $x_2$  المعادلة  $x_2 < 1,6$  و  $x_1 < -1,5$  حيث  $x_2 < 1,6$  و  $x_1 < -1,6$  و  $x_2 < 1,6$  و  $x_1 < -1,6$  انشئ  $x_2 < 1,6$  و  $x_1 < -1,6$ 
    - :الدالة المعرفة على R كما يلي h لتكن h الدالة المعرفة على  $h(x) = (ax + b)e^x$

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة  $x\mapsto xe^x$  على x

R ب- استنتج دالة أصلية للدالة R على R

## حل الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

#### حل التمرين 01:

( " ) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي  $u_0 = \frac{13}{4}$  $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$ 

برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن  $:3 < u_n < 4$ 

نسمى p(n) هذه الخاصية ونتحقق أن p(n) صحيحة. لدينا:  $u_0 = \frac{13}{4}$  ومنه  $u_0 < 4$  إذن  $u_0 = \frac{13}{4}$  لدينا: n نفرض أن p(n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي p(n)أي  $4 < u_n < 4$  ونبرهن أن p(n+1) صحيحة من أجل  $3 < u_{n+1} < 4$  of n decay  $3 < u_{n+1} < 4$ (-3) البرهان: لدينا  $4 < u_n < 4$  بإضافة العدد  $0 < u_n - 3 < 1$  نجد

باستعمال الجذر التربيعي نجد  $1 > \frac{1}{2} \sqrt{u_n - 3}$  وبإضافة  $3 < u_{n+1} < 4$  وبالتالي  $3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4$  العدد 3 نجد: 4 إذن (1 + 1) إذ

صحیحة من أجل كل عدد طبیعي n ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n  $.3 < u_n < 4$  : وأ

(u, ) دراسة اتجاه تغيرات المتتالية ( عبر ا إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3 + u_n - 3}}$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n$$

 $u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n-3}+3-u_n \times \frac{\sqrt{u_n-3}-(3-u_n)}{\sqrt{u_n-3}-(3-u_n)}$ :

$$u_{n-1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n - 3}\right)^2 - \left(3 - u_n\right)^2}{\sqrt{u_n - 3} - \left(3 - u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 3 - \left(u_n^2 - 6u_n + 9\right)}{\sqrt{u_n - 3} - \left(3 - u_n\right)}$$
$$= \frac{u_n - 3 - u_n^2 + 6u_n - 9}{\sqrt{u_n - 3} - \left(3 - u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

 $: (u_{n+1} - u_n)$  دراسة إشارة الفرق

 $-u_n^2 + 7u_n - 12$  إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$  من إشارة  $\sqrt{u_n-3}-(3-u_n)>0$   $\forall$ 

و بها أن  $-u_n^2 + 7u_n - 12 = (4 - u_n)(u_n - 3)$  فان

 $(4-u_n)$  من إشارة  $-u_n^2 + 7u_n - 12$  إشارة

 $u_{n} - 3 > 0$  کان

 $-u_n > -4$  من جهة أخرى لدينا  $u_n < 4$ 

وبالتالي 0<4+ س

وعليه نستنتج أن  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالنالي المتنالبة  $u_{n+1} - u_n > 0$ 

 $e^{r_n} = u_n - 3$  الدينا  $P_n$  بدلالة الدينا و $P_n$  $e^{v_1} = u_2 - 3$   $e^{v_1} = u_1 - 3$ ,  $e^{v_0} = u_0 - 3$  axe  $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times .... \times (u_n - 3)$  $P_n = (e^{v_0})(e^{v_1})(e^{v_2}) \times \dots \times (e^{v_n})$  $P_n = e^{i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_n} = e^{i_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$  $p_n = e^{\frac{\ln \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}} = e^{\frac{\ln \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2}} : 4 = e^{\frac{\ln \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2}}{2}}$  $p_n = e^{2Ln\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$ 

حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} \left( e^{2Ln \frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} \right) \lim_{n \to +\infty} P_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \left( e^{2Ln \frac{1}{4} \times \left(1 - 0\right)} \right) = e^{2Ln \frac{1}{4}} \quad \text{and} \quad e^{2Ln \frac{1}{4}}$$

$$= \left( e^{Ln \frac{1}{4}} \right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

 $oldsymbol{0}$  إثبات أن النقط B,A و C تعين مستويا: .

لدينا  $\overline{AC}(2;-1;-1)$  و  $\overline{AB}(3;1;-1)$  نلاحظ أن  $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$  إذن لا توجد قيمة k بحيث يكون  $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ وبالتالي النقط C,B,A تشكل مستوى.

بات أن 3 = 3 - 2x - y + 5z - 3 = 0 إثبات أن 2x - y + 5z - 3 = 0للمستوي (ABC):

2(-1)-(0)+5(1)-3=0=0 يعني  $2x_A-y_A+5z_A-3=0$ (ABC) أي  $A \in (ABC)$  ومنه النقطة A تنتمي إلى المستوى

استنتاج أن المتتالية متقاربة: بها أن  $(u_n)$  متتالية متزايدة 0وعدودة من الأعلى بالعدد 4 فإن المتتالية ( س ) متقاربة. 0 (٧٫) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي  $v_n = Ln(u_n - 3)$ ا متتالیة هندسیة أساسها :  $\frac{1}{2}$  متتالیة هندسیة أساسها ا متتالیة متتالیة متتالیة  $v_{n+1} = q \times v_n$ :هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q يحقق الدينا:  $v_n = Ln(u_n - 3)$  وعليه:  $v_{n+1} = Ln(u_{n+1} - 3) = Ln(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3)$  $v_{n+1} = Ln(\sqrt{u_n - 3}) = Ln(u_n - 3)^{\frac{1}{2}}$  $v_{n+1} = \frac{1}{2} Ln(u_n - 3)$ ومنه المتتالية ( $v_n$ ) متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = Ln(u_0 - 3) = Ln(\frac{13}{4} - 3) = Ln(\frac{1}{4})$  $(u_n)$  كتابة كلاً من  $v_n$  من بدلالة

 $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}$  (دينا:  $v_n = v_0 \times q^n$  ومنه  $v_n = v_0 \times q^n$  $e^{v_n} = u_n - 3$  من جهة أخرى لدينا:  $v_n = Ln(u_n - 3)$ : من جهة 

 $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left( e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n L n \frac{1}{4}} + 3 \right)$ 

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \left( e^{0Ln\frac{1}{4}} + 3 \right) = e^0 + 3 = 4$$

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي:

$$P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times ... \times (u_n - 3) n$$

أي أن H € (ABC) ومنه النقطة H تنتمي إلى المستوى .(ABC) $\overline{DH}\left(-\frac{17}{15}; -\frac{17}{30}; -\frac{17}{6}\right)$  [17] ومن جهة أخرى لدينا بها أن  $\overline{n_{(ABC)}}$  و  $\overline{DH} = -\frac{30}{17} \overline{n_{(ABC)}}$  موتبطان خطيا وبالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة D على . (ABC) المستوى ج- استنتاج أن المستويين ( ADH) و (ABC) متعامدان. ئم إيجاد قمثيلا وسيطيا لتقاطعهما: بما أن DH عمودي على المستوى (ABC) نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان. تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم تقاطعهما: مما سبق نستتج أن المستويين ( ADH) و (ABC) يشتركان في نقطتين هما (ADH) و النقطة A ومنه المستويين Hو ( ABC ) متعامدان ومتقاطعان وفق المستقيم ( AH). نعين التمثيل الوسيطي للمستقيم ( AH): نعتبر النقطة من المستقيم (AH) من المستقيم M(x;y;z) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}$  مو (AH) للمستقيم  $\overline{AM}(x+1;y;z-1)$  و  $\overline{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$  لدينا  $x+1=\frac{28}{15}t$ و بالتالي: t∈R  $(AH): \begin{cases} y = -\frac{13}{30}t \end{cases}$  $|z-1| = -\frac{5}{6}t$  $\int x = \frac{28}{15}t - 1$ 

 $(AH): \begin{cases} y = -\frac{13}{30}t \end{cases}$ 

 $z = -\frac{5}{6}t + 1$ 

ويالنالي: ١∈٣

176

 $2x_R - y_R + 5z_R - 3 = 0$  $B \in (ABC)$   $\geq (2(2)-(1)+5(0)-3=0$ ومنه النقطة B تنتمى إلى المستوى (ABC).  $2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 0$  $C \in (ABC)$  أي 2(1)-(-1)+5(0)-3=0ومنه النقطة C تنتمي إلى المستوى (ABC). 2x - y + 5z - 3 = 0 هو المستوي (ABC) ومنه المستوي  $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$  فعتبر  $D\left(2; -1; 3\right)$  والنقطة  $D\left(2; -1; 3\right)$ أ- إثبات أن النقطة (2;-1;3) لا تنتمي إلى المستوي :  $2x_D - y_D + 5z_D - 3 \neq 0$  (ABC)  $2(2)-(-1)+5(3)-3\neq 0$  لدينا:  $0\neq 0$  $17 \neq 0$ أي: $D \notin (ABC)$  ومنه النقطة D لا تنتمي إلى المستوى ب- إثبات أن النقطة  $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$  هي المسقط العمودي للنقطة (2;-1;3) على المستوى: ( ABC ) هي المسقط العمودي  $H \in (ABC)$  للنقطة D على المستوى  $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{kn_{(ABC)}}$ نتحقق أن النقطة  $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$  تنتمي إلى المستوى  $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 0$  (ABC)  $2\left(\frac{13}{15}\right) - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) - 3 = \frac{26}{15} + \frac{13}{30} + \frac{5}{6} - 3$  $\frac{52+13+25-90}{30} = \frac{90-90}{30} = 0$  :

: على الشكل الأسي: 
$$z_C, z_B, z_A$$
 من كتابة كلا من  $z_C, z_B, z_A$  على الشكل الأسي:  $z_C = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ 
 $z_B = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ 
 $z_A = 6 = 6e^0$ 

ب) كتابة العدد 
$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$$
 على الشكل الجبري و الأسي: 
$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - 3 - i\sqrt{3}}{6 - 3 + i\sqrt{3}}$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \times \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{9 - i6\sqrt{3} + \left(i\sqrt{3}\right)^2}{3^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{9 + 2\sqrt{3}i - 3}{9 + 3} = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{12}$$
:لدينا

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6(1 - \sqrt{3}i)}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} :$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i :$$
وبالتالي:

$$: \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$$
 الشكل الأسي للعدد

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$
 لدينا:

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$
 :لدينا

$$\begin{cases} \frac{BA}{CA} = 1\\ \left(\overline{AC}; \overline{AB}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

. 
$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$$
 بعتبر كثير الحدود  $\mathbf{0}$  :  $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$  بعتبر كثير الحدود  $\mathbf{0}$ :  $P(z) = 6^3 - 126^2 + 48 \times 6 - 72$  لدينا:  $P(6) = 0$ 

$$P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$$
 $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$ 

الدينا:  $P(z) = z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta$ :

المطابقة مع  $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ 

المطابقة مع  $z = -12$ 
 $z = -12$ 

$$P(z) = (z-6)(z^2-6z+12)$$
 (عطيه:  $\begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 12 \end{cases}$ 

$$P(z) = 0$$
 المعادلة  $C$  المعادلة  $C$  المعادلة  $C$  المعادلة  $C$  المعادلة  $C$  المعادلة  $P(z) = 0$  تعني أن  $P(z) = 0$ 

$$\begin{cases} z - 6 = 0 \\ z^2 - 6z + 12 = 0 \end{cases}$$
 :  $z = 0$ 

ثانيا: 
$$z^2 - 6z + 12 = 0$$
 ومنه نحسب الميز فنجد

$$\Delta = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$$
 of  $\Delta = -12$ 

$$\begin{cases} \frac{BA}{CA} = 1 \\ (\overline{AC}; \overline{AB}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} z_1 = 3 - \sqrt{3}i \\ z_2 = 3 + \sqrt{3}i \end{cases} : \int_{z_2}^{z_1} \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} dx = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي :

$$.S = \left\{6; 3 - \sqrt{3}i; 3 + \sqrt{3}i\right\}$$

 $\sqrt{3}$  ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته  $\frac{\pi}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ 

أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه 2:

$$z'-z_{c}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_{c})$$
 : العبارة المركبة للتشابه هي  $z'-z_{c}=\sqrt{3}i(z-z_{c})$   $z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}iz_{c}+z_{c}$   $z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}i(3-i\sqrt{3})+3-i\sqrt{3}$   $z'=\sqrt{3}iz-3\sqrt{3}i-3+3-i\sqrt{3}$   $z'=\sqrt{3}iz-4\sqrt{3}i$ 

.  $z' = \sqrt{3}iz - 4\sqrt{3}i$  ومنه العبارة المركبة للتشابه هي:

ب) تعيين  $z_A$  لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S:

: ii يعني أن 
$$A$$
 صورة النقطة  $A$  بالتشابه  $S$  يعني أن  $z_{A'}=\sqrt{3}iz_A-4\sqrt{3}i$  
$$z_{A'}=6\sqrt{3}i-4\sqrt{3}i$$
 
$$z_{A'}=2\sqrt{3}i$$

ج) إثبات أن النقط A', B, A في استقامية:

النقط A',B,A على استقامة واحدة يعني أن

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} \in R$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} = \frac{6 - 3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i}$$
 لدينا:

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i} = \frac{\left(3 - \sqrt{3}i\right)}{2\left(3 - \sqrt{3}i\right)} = \frac{1}{2} : \text{i}$$

و بالتالي النقط A',B,A على استقامة واحدة.

#### حل التمرين 04:

.  $g(x) = 1 - xe^{x}$  كما يلي: R كما يلي (الدالة المعرفة على R

: 
$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$
  $\lim_{x \to +\infty} g(x)$  حساب  $\mathbf{0}$ 

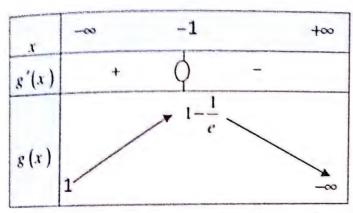
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - xe^x)$$

$$= -\infty \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - xe^x) = 1$$

و دراسة اتجاه تغیرات الدالة g و تشکیل جدول تغیراها: g دالة قابلة للاشتقاق علی g و دالتها المشتقة هي g حبث: g'(x) = -e' - xe' g'(x) = (-1-x)e'

إشارة المشتقة من إشارة -1-x لأنه من اجل كل عدد حقيقى:  $e^x \succ 0$ .

لدينا 0=x-1 ومنه: 1-x=0 وعليه الدالة x متزايدة تماما على المجال  $[-1:\infty-[$  ومتناقصة تماما على المجال  $[-1:\infty-[$  ومتناقصة تماما على المجال  $[-1:\infty-[$  ومتناقصة تماما على المجال  $[-1:\infty-[$ 



 $\alpha$  أ- إثبات أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا g(x) = 0 على المجال g(x) = 0:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على  $-\infty;1-\frac{1}{e}$  المجال g(x)=0 و تأخذ قيمها في المجال g(x)=0 إذن المعادلة g(x)=0 و العدد صفر ينتمي إلى  $-\infty;1-\frac{1}{e}$  إذن المعادلة  $\alpha=0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha=0$  على المجال  $\alpha=0$ :  $\alpha=0$ 

و بها أن 0> (0,6) g (0,5) g إذن 0,6 <0 <0. إشارة ( x ) g :

| x    | 00 | $\alpha$ | +00 |
|------|----|----------|-----|
| g(x) | +  | 7        | _   |

$$\lim_{x\to\infty}f(x) \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x - x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (x-1)e^x = 0 : \forall y$$

 $]{-\infty;2}$ من أجل كل عدد حقيقي x من أجل كل عدد 0

$$:f'(x) = -g(x)$$
 فإن

 $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$  حيث:  $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$  حيث:  $f'(x) = xe^x - 1 = -(-xe^x + 1)$  f'(x) = -g(x)

استنتاج إشارة f'(x) على المجال f(x) = [ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة g(x) وعليه:

ومنه f متناقصة تماما على المجال [α;∞-[. و f متزايدة تماما على المجال [α;2]. جدول التغيرات:

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$
 اثبات أن  $\mathfrak{S}$  اثبات أن  $f(\alpha) = (\alpha - 1)e^{\alpha} - \alpha - 1$  لدينا

$$1-\alpha e^{\alpha}=0$$
 : أي:  $g(\alpha)=0$  لدينا  $g(\alpha)=0$ 

$$e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$
 :وبالتالي

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$$
 i.e.

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$

استنتاج حصراً للعدد  $f(\alpha)$  (تدور النتائج إلى  $f(\alpha)$ ):

(1)..........
$$\frac{1}{0.6} < \alpha < \frac{1}{0.5}$$
 ومنه  $0.5 < \alpha < 0.6$  لدينا

$$0,25 < \alpha^2 < 0.36$$
 ومن جهة أخرى

$$1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36$$
 أي

$$-1,36 < -(\alpha^2 + 1) < -1,25$$
 : أي:

$$-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$$
 :ومنه

$$.-2,72 < f(\alpha) < -2,08$$
 إذن:

$$y = -x - 1$$
 أ- إثبات أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذا المعادلة  $\Theta$ 

$$-\infty$$
 مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) بجوار

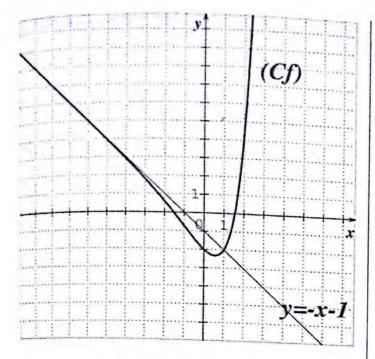
$$f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$$
 :لدينا

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \to \infty} (x - 1)e^x = 0$$
 إذن:

ومنه : 
$$y = -x - 1$$
 ( $\Delta$ ) ومنه :  $y = -x - 1$  ( $C_f$ ) ومنه : للمنحنى ( $C_f$ ) بجوار

$$(\Delta)$$
 بالنسبة إلى  $(C_f)$  بالنسبة إلى

$$[f(x)-(-x-1)]$$
 دراسة إشارة الفرق



نتكن h الدالة المعرفة على R كما يلي:

$$.h(x) = (ax + b)e^x$$

 $x\mapsto xe^x$  أ- h دالة معرفة على المجال h كما يلي h أ- h دالة معرفة على المجال h خاتمين العددين الحقيقيين a

: على R يعني أن الدالة أصلية للدالة  $x\mapsto xe^x$ 

$$h'(x) = xe^x$$
 $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x$ 
 $h'(x) = (ax + a + b)e^x$ 

الدينا:  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ 
 $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ 

الطابقة نجد:  $a = 1$ 
 $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ 

الدينا:  $a = a + b = a$ 
 $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = a \end{cases}$ 

الطابقي عبارة الدالة  $a = a + b = a$ 
 $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = a \end{cases}$ 

الدينا عبارة الدالة  $a = a + b = a$ 
 $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = a \end{cases}$ 

الدينا عبارة الدالة  $a = a + b = a$ 
 $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = a \end{cases}$ 

بها أن h دالة أصلية للدالة  $x\mapsto xe^x$  فإن الدالة الأصلية R دالة أصلية للدالة  $x\mapsto x-(x-1)e^x+c$  على R للدالة R هي الدالة R

لدينا:  $f(x) - (-x-1) = (x-1)e^{-x}$  إشارة الفرق من إشارة (x −1) على المجال [1;∞-[ يكون لدينا و بالتالي المنحنى f(x)-(-x-1)<0 يقع f(x)تّحت المستقيم (Δ)وعلى المجال [2;l[ يكون لدينا  $(C_f)$  وبالتالي المنحنى  $(C_f)$  يقع فوق المستقيم (△). M (1;-2) في النقطة ( $C_{f}$ ) المنحنى ( $C_{f}$ ) في النقطة  $x_2$  و  $x_1$  تقبل حلّين f(x) = 0 تقبل حلّين G $= -1.5 < x_2 < 1.6$  و  $= -1.6 < x_1 < -1.5$ f(-1,5) = -0.06 و f(-1,6) = 0.08 ليينا [-1,6;-1,5] المجال أحتناقصة تماما على المجال f $f(-1,5) \times f(-1,6) < 0$ إذن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا إذن المعادلة المتوسطة.  $-1,6 < x_1 < -1,5$ f(1,5) = -0.26 f(1,6) = 0.37 \*[1,5;1,6] المجال [1,5;1,6]  $f(1,5) \times f(1,6) < 0$ إذن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا  $x_2$  حيث

1.5 <  $x_2$  < 1.6 حسب مبرهنة القيم المتوسطة ومنه نستنتج أن المنحنى ( $C_f$ )

يقطع محور الفواصل في نقطتين هما :

 $M_{2}(x_{2};0) \supset M_{1}(x_{1};0)$ 

 $(C_f)$  و  $(\Delta)$ 

## الموضوع 1 (دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

 $U_0=1$  : يكن  $(u_n)$  المتنالية العددية المعرفة كما يلي:

 $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} : n$  يمن أجل كل عدد طبيعي  $n = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ 

: المتتالية العددية المعرفة كما يلي  $v_n = u_n + 4 : n$  من أجل كل عدد طبيعي  $v_n = u_n + 4 : n$ 

ا بين أن (٧) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها

 $(u_n)$  کب کلا من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  بدلالة  $(u_n)$ 

.  $\mathbb{IN}$  على المتتالية  $(u_n)$  على  $(u_n)$ 

4) أحب بدلالة المجموع Sn حيث:

 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ 

) لنكن  $(w_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

 $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$ 

- ين أن المتتالية (wn متزايدة تماما على IN.

 $\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n):--$ 

## لنمرين 02 :

 $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$  لنضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس نعتبر النقط:

D(1;1;1) C(1;-1;2) B(-1;2;1) A(2;-1;1)

ا) أ- تحقق أن النقط C. B. A تعين مستويا.

 $\overrightarrow{r}$  (1;1;1) هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

<sup>2)</sup> لتكن النقطة مرجح الجملة المثقلة {(A;1);(B;2);(C;-1)} أ) أحسب إحداثيات G.

ب) لتكنّ (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

 $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MD}$ 

بين أن  $(\Gamma)$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [GD]. 6x - 4y + 2z + 3 = 0: هي ( $\Gamma$ ) هي أثبت أن معادلة ( $\Gamma$ ) هي

 $(\Delta)$  بين أن المستويين (ABC) و $(\Gamma)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

## التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

 $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$ 

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

لتكن النقط D، C، B ، A التي لاحقاتها على  $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ 

 $z_D = \frac{z_C}{2}$  o  $z_C = 6\sqrt{2}$  o  $z_B = \overline{z_A}$  o  $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ 

أ - أكتب  $z_{\rm A}$  و $z_{\rm A}$  و  $z_{\rm A}$  الأسي.

ج) بين أن النقط C، B، A ، O تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

د) أحسب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  ثم جد قيسا للزاوية ما هي طبيعة الرباعي OACB؟

 $\frac{\pi}{2}$ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

أكتب العبارة المركبة للدوران R.

R بالدوران C عين لاحقة النقطة C صورة النقطة ثم تحقق أن النقط C'AC في إستقامية.

ج) عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثم R حدد صورة الرباعي OA'CB بالدوران

التمرين 04 :

نعتبر الدالة العددية /المعرفة على المجال إ∞+ : 10 كما يلي:

$$f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

و (Cf) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (o,i',j').

ا) أ – أحسب  $\lim_{x\to 0} f(x)$  و  $\lim_{x\to 0} f(x)$  فسر النتيجتين هندسيا.

ب) أدرس اتجاه تغيرات الدالة /على المجال ]∞+ ; 0[ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - أدرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم ( $\Delta$ ) الذي

ب) أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بين أن المعادلة 0 = (١) / تقبل في المجال 11: 10 علا وحيدا  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$  حيث  $\alpha$ 

(3)  $C_{f}(C_{f}) \in (C_{f})$ .

4) لتكن الدالة h المعرفة على R - {0} كما يلي :  $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{1-1}$ 

وليكن (Ch) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ،

? ماذا تستنتج h(x) - h(-x) = 0

 $(C_f)$  إنشى المنحنى  $(C_h)$  إعتمادا على المنحنى

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول .  $\ln x^2 = (m-1)|x|$  : المادلة:

# حل الموضوع 1 (دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01:

(ایات أن  $(v_n)$  متتالیة هندسیة یطلب تعیین أساسها وحدها البات أن  $(v_n)$ الأول:

: يلي متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي المتالية هندسية إذا تحقق ما يلي

 $v_{n+1} = v_n . q$  : من أجل كل عدد طبيعي n فإن حيث q عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

 $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3}$  $=\frac{2}{3}(u_n+4)=\frac{2}{3}v_n$ 

ومنه  $v_n$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{2}{3}$  وحدها الأول:

 $v_0 = u_0 + 4 = 5$ 

: n كتابة كلا من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة

 $v_n = v_0$ .  $q^n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ : n are dense  $q^n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 

 $v_n = u_n + 4$ : n من أجل كل عدد طبيعي

 $u_n = v_n - 4 = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$ :

:  $\mathbb{N}$  على ( $u_n$ ) على (3

من أجل كل عدد طبيعي n:

 $u_{n-1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} - u_n = -\frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3}$  $=-\frac{1}{3}.5\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-4-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\frac{16}{3}<0$ 

وعليه فإن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما.

 $S_n$  حساب بدلالة n المجموع (4  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  $=(v_0-4)+(v_1-4)+....+(v_n-4)$  $=(v_0+v_1+.....+v_n)+(-4-4..-...-4)$  $= v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 4(n+1) = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 4n - 4$  $= 15\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 4n - 4 = 11 - 4n - 15\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC): n . AM = 0 : فإن (ABC) من المستوي M(x;y;z) فإن G(x; y; z):  $\overrightarrow{AM}(x-2; y+1; z-1)$  $x = \frac{1 \times (2) + 2 \times (-1) - 1 \times (1)}{1 + 2 - 1} = -\frac{1}{2}$  $y = \frac{1 \times (-1) + 2 \times (2) - 1 \times (-1)}{1 + 2 - 1} = 2$  $z = \frac{1 \times (1) + 2 \times (1) - 1 \times (2)}{1 + 2 - 1} = \frac{1}{2}$  $G\left(\frac{-1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$ : eath ب -  $(\Gamma)$  مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :  $\vec{M}A + 2\vec{M}B - \vec{M}C = 2\vec{M}D$ [GD] هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{MD}|$ لدينا:  $|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2 \overrightarrow{MG} + 2 \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GC}| = 2 ||\overrightarrow{MD}||$  ومنه:  $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$  مرجح الجملة المثقلة G $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = 0$  :  $\left\| \overrightarrow{MG} + 2 \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MG} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MD} \right\|$  : ومنه  $2 \overrightarrow{MG} = 2 \overrightarrow{MD}$ MG = MD :  $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD}$ ومنه :  $(\Gamma)$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $(\Gamma)$  : 6x - 4y + 2z + 3 = 0 هي:  $(\Gamma)$  هيات أن معادلة  $(\Gamma)$  شعاع ناظمي للمستوي  $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ و النقطة  $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$  منتصف القطعة المستقيمة [GD].  $\overrightarrow{GD}$ .  $\overrightarrow{\omega M} = 0$ : نائقطة M(x;y;z) من المستوي فإن  $\vec{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ ,  $\vec{\omega M}\left(x-\frac{1}{4};y-\frac{3}{2};z-\frac{3}{4}\right)$ 

ى لنكن (wn) المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي :  $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$ ا- إثبات أن المتتالية (wn) متزايدة تماما على IN: الدينا من أجل كل عدد طبيعي n:  $w_{n+1}-w_n = 5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5}-1\right)-5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$  $= \frac{5}{v_{n+1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5} = 5 \left( \frac{1}{\frac{2}{3}v_n + 5} - \frac{1}{v_n + 5} \right)$  $=5\left(\frac{3}{2v_{n}+15}-\frac{1}{v_{n}+5}\right)=5\left(\frac{v_{n}}{(2v_{n}+15)(v_{n}+5)}\right)$  $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ : الدينا من أجل كل عدد طبيعي nومنه :  $w_n > 0$  متز ایدة تماما.  $w_{n+1} - w_n > 0$  $\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n) \leftarrow (\psi$  $\lim_{n \to +\infty} (u_n - w_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[ v_n - 4 - 5 \left( \frac{1}{v_n + 5} - 1 \right) \right] = 0$  $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$  ذَنْ التمرين02 : D(1;1;1) ، C(1;-1;2) ، B(-1;2;1) ، A(2;-1;1): لدينا النقط : التحقق أن النقط C، B، A تعين مستويا- أ تعين النقط C، B، A مستويا وحيدا إذا كان :  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطان خطيا.  $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$  و  $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$  لدينا ومنه  $\overrightarrow{AB}$  و غير مرتبطان خطيا. (ABC) با إثبات أن(1;1;1) هو شعاع ناظمي للمستوي(ABC).  $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1.(-3) + 1.(3) + 1.(0) = 0$  $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1.(-1) + 1.(0) + 1.(1) = 0$ با ان $\overrightarrow{AB}$   $\overrightarrow{n}$  و $\overrightarrow{AC}$   $\overrightarrow{n}$  فإن (1;1;1) هو شعاع ناظمي

(ABC) للمستوي

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad |1+i| = \sqrt{2} : \text{limit}$$

$$|(1+i)Z_A| = 6\sqrt{2} : \text{eval}$$

$$\arg[(1+i)Z_A] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{g}$$

$$(1+i)Z_A = 6\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} : \text{eval}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$(1+i)Z_A = 6\sqrt{2} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{\pi}{4} \cdot e^{-2i} =$$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = e^{i\frac{\pi}{2}.2014} = e^{i.1007\pi}$$
$$= \cos(1007\pi) + i.\sin(1007\pi)$$
$$= \cos\pi + i.\sin\pi = -1$$

جـ - إثبات أن النقط C ، A ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

$$OD = |Z_D - Z_O| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} \right| = 3\sqrt{2}$$

$$AD = |Z_D - Z_A| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2}(1+i) \right| = 3\sqrt{2}$$

$$BD = |Z_D - Z_B| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2}(1 - i) \right| = 3\sqrt{2}$$

$$CD = |Z_D - Z_C| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} - 6\sqrt{2} \right| = 3\sqrt{2}$$

 $OD = AD = BD = CD = 3\sqrt{2}$  با أن:

فإن النقط C، B، A، O تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $r=2\sqrt{3}$  ونصف قطرها D

 $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ : د-حساب

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1 - i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1 + i) - 6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2(1-i-2)}}{3\sqrt{2}(1+i-2)} = \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$|\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{\omega M}| = 0$$

$$\frac{3}{2} \left( x - \frac{1}{4} \right) - 1 \left( y - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( z - \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$\frac{3}{2} x - y + \frac{1}{2} z + \frac{3}{4} = 0$$

$$3x - 4y + 2z + 3 = 0$$

( $\Delta$ ) إثبات أن المستويين ( $\Delta BC$ ) و( $\Gamma$ ) يتقاطعان وفق مستقيم ( $\Delta$ ) يطلب تعيين تمثيل وسبطي له:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z + 3 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \dots \times (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z + 3 = 0 \dots \times (-2) \\ -2x - 2y - 2z + 4 = 0 \dots \times (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6t - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

## التمرين03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

$$z^{2} - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$$

$$\Delta' = b'^{2} - ac = (-3\sqrt{2})^{2} - 1 \times 36 = -18 = (3\sqrt{2}i)^{2}$$

$$z_{1} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$$

$$z_{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{2}i$$

2) أ - كتابة 
$$z_{A}$$
 و  $z_{A}$  و  $z_{A}$  الشكل الآسي.

$$Z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_A = 6.e^{i\frac{\pi}{4}}$$
: ease

$$Z_B = \overline{Z_A} = 6.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{bmatrix} \ln x \to -\infty \\ x \to 0^+ \end{bmatrix} :$$
 ווא 
$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

x عن أجل كل f من أجل كل f

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot (2 \ln x)}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

إشارة من إشارة البسط لأن المقام موجب تمام.

$$1 - \ln x > 0$$
 و  $1 - \ln x = 0$ 

 $\ln x < 1$ 

 $\ln x = 1$ 

x < e

x = e

| قیم ۲          | 0 | e | +∞ |
|----------------|---|---|----|
| إشارة<br>f'(x) |   | + | -  |

ومنه fمتزايدة تماما على المجال [0,e] متناقصة تماما على الجال ]e; +∞[ الجال

f الدالة f:

| x قيم         | 0 |   | e                | +∞ |
|---------------|---|---|------------------|----|
| إشارة         |   | + | 0                | _  |
| f'(x)         |   |   | <u> </u>         |    |
| إشارة         |   | A | $1 + \frac{2}{}$ |    |
| إشارة<br>f(x) | 0 |   | e                | 1  |

2) أ - دراسة وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة للمستقيم ( $\Delta$ ) الذي  $f(x)-y=\frac{2\ln x}{x}:y=1$ معادلته

| نیم x                                 | 0   | <i>e</i> +∞ |
|---------------------------------------|-----|-------------|
| إشارة 2lnx                            | +   | 0 -         |
| إشارة x                               | +   | +           |
| f(x) - y                              | -   | <b>V</b> +  |
| وضعية (C <sub>f</sub> )<br>بالنسبة(Δ) | تخت | فوق (اق     |

 $\left( \overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}
ight)$  ایجاد فیساللزاویة x=0 ومنه  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $arg\left(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}$  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$ 

الثلث ABC قائم في C وتساوي الساقين لأن

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} = |i| = 1$$

OD = AD = BD = CD

(AB] والنقطة D منتصف (AB] والنقطة D منتصف

وعليه فإن الرباعي OACB مربع

يكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ . أ- كتابة العبارة المركبة للدوران R:

Z' = aZ + b: العبارة المركبة للدوران R تكتب على الشكل

$$a = i$$
: ومنه  $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$  ومنه  $|a| = 1$ 

b = 0 ومنه  $Z_0 = a Z_0 + b$ : ومنه  $Z_0 = 0$ 

Z' = i.Z: R ومنه العبارة المركبة للدوران

R نادوران C صورة النقطة C بالدوران C

$$Z_{C'} = i.Z_C = 6\sqrt{2}.i$$

النحقق أن النقط C'، A ، C في إستقامية.

$$\overrightarrow{AC}(3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$$
:  $\overrightarrow{AC}(6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}; 0 - 3\sqrt{2})$ 

$$\vec{AC'}\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$$
: ومنه  $\vec{AC'}\left(0-3\sqrt{2};6\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)$ 

أي: 
$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC}'$$
 وعليه النقط  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC}'$  في إستقامية.

R بالدوران A مورة النقطة A بالدوران R

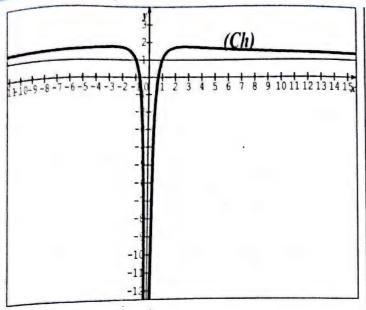
$$Z_{A'} = i.Z_A = i [3\sqrt{2}(1+i)] = 3\sqrt{2}(-1+i)$$

OA'C'A مورة الرباعي OACB بالدوران R هو الرباعي  $R(B) = A_0 R(C) = C'_0 R(A) = A'_0 R(O) = O$ :

$$D_f = ]0; +\infty[ \int f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

$$\left[\frac{\ln x}{x} \to 0\right] :$$
 الأن 
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - 1(1)$$

y=1 ومنه ( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب معادلته



جـ - المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : |x| = (m-1)|x|

$$\frac{\ln x^2}{|x|} = m - 1$$
: ومنه  $\ln x^2 = (m - 1)|x|$ : لدينا

$$h(x) = m$$
:  $\frac{2 \ln |x|}{|x|} + 1 = m$ :  $\frac{|x|}{|x|}$ 

وبالتالي فإن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_h)$  مع المستقيم الذي معادلته y=m

| قیم m | - ∞  | 1    | $1+\frac{2}{e}$ | +∞              |
|-------|------|------|-----------------|-----------------|
|       | حلين | حلين | 4 حلول          | لا يوجد<br>حلول |

ب) معادلة الماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$f(1)=1$$
  
 $f'(1)=2$ : حیث  $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ 

y = 2x - 1 : e

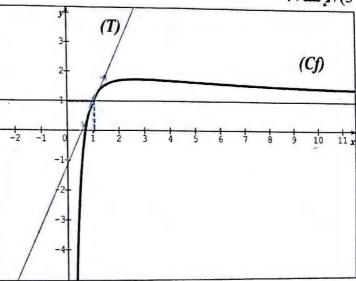
f الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال [ 1,0[

$$\lim_{x \to 0} f(x) \times f(1) < 0 \quad \text{o} \quad f(1) = 1 \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad \text{o}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة f(x) = 0 تقبل في المجال [ 0,1] حلا وحيدا  $\alpha$  وبها أن :

$$f(e^{-0.3}) \approx 0.2$$
 و  $f(e^{-0.4}) \approx -0.2$  و  $[e^{-0.4}, e^{-0.3}] \subset ]0;1]$ 
 $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$  فإن  $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ :

### 3) الإنشاء:



$$D_h = R - \{0\}$$
  $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$  (4)

أ - إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : h(x) - h(-x) = 0

$$h(-x) - h(x) = 1 + \frac{2\ln|-x|}{|-x|} - 1 - \frac{2\ln|x|}{|x|}$$
$$= \frac{2\ln|x|}{|x|} - \frac{2\ln|x|}{|x|} = 0$$

ومنه نستنتج أن h دالة زوجية.

$$h(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x} = f(x)$$
: فإن  $x \in ]0,+\infty[$  لل  $-$  وعليه فإن  $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$ 

وبها أن h دالة زوجية فإن  $(C_h)$  يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

# الموضوع 2( دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

## التمرين 01:

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد  $\mathbf{0}$  $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ : الطبيعية IN بحدها العام

(e) هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

ا) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها

احسب  $u_n$  ماذا تستنتج. (2

: أحسب بدلالة n المجموع  $S_n$  حيث:

 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ 

 $v_n = \ln u_n : n$ نضع من أجل كل عدد طبيعي  $\mathbf{0}$ 

( ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

ا) عبر عن  $(v_n)$  بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية  $(v_n)$ .

: حيث  $P_n$  حيث أ – أحسب بدلالة  $P_n$  العدد

 $P_n = \ln \left( u_0 \times u_1 \times ... \times u_n \right)$ 

ABC ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث :  $P_n + 4n > 0$  ج أحسب مساحة المثلث

 $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$  الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس نعتبر النقط (A(1;-1;-2 و B(1;-2;-3) و C(2;0;0)

اً أ- برهن أن A و B و C ليست في استقامية.

ب - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

x+y-z-2=0 ج – تحقق أن x+y-z-2=0 هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و(Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0 (P): x - y - 2z + 5 = 0

برهن أن (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  ذي التمثيل

 $\int x = t - 3$ y = -t;  $(t \in R)$ : z = t + 1

(3) (P) ((ABC)) ((P)) ((P)) ((P))

d(M,(P))نقطة من الفضاء. نسمي M(x,y,z) (4 Mالمسافة بين M والمستوي (P) و d(M,(Q)) المسافة بين والمستوي (Q).

عين المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط M بحيث :

 $\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$ 

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول ت  $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ :

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $\overrightarrow{o,i},\overrightarrow{j}$ ) (وحدة الطول  $\overrightarrow{cm}$ )، تعطى النقط A وB وC التي لواحقها :  $z_{\rm A} = i + 2i$  و  $z_{\rm C} = 1 - 2i$  على الترتيب. أ – أنشئ النقط A و B و C .

> A المسقط العمودي للنقطة H المسقط العمودي للنقطة على المستقيم (BC).

 $\frac{\pi}{2}$  ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ . أ - عين الكتابة المركبة للتشابه S.  $\frac{1}{2}$  cm<sup>2</sup> بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي - بين أن مساحة صورة المثلث

نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث :

|z| = |iz + 1 + 2i|

## التمرين04:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي :

 $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ 

 $\lim_{x\to+\infty}g(x):\lim_{x\to-\infty}g(x)$ 

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة g على IR ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - بين أن المعادلة 0 ~ (x) يرتقبل حلا وحيدًا a حيث : 0.7 ( \alpha ( 0.8

ب - استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة (R(x).

🛭 نعتبر الدالة العددية / المعرفة على الله كها يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و(C<sub>f</sub>) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس ( O,T , J )

 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pmod{1}$ 

2) أ - بين أنه من أجل كل x من 111:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

 $(\Delta)$  به استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا ماثلا  $(\Delta)$  يطلب تعين معادلته.

 $(\Delta)$  و  $(C_f)$  النسبي للمنحني  $(C_f)$  و

: 
$$dR$$
 عين أنه من أجل كل  $x$  من  $g(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ 

حيث 'أمشتقة الدالة أ.

ب -استنتج إشارة f'(x) حسب قيم x ثم شكل جدول تغيران f(x) الدالة ( نأخذ 0,1  $\alpha$  )

f(x) = 0 أحسب (1) ثم حل في IR المعادلة (4)

أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (رC).

6) لتكن الدالة المعرفة على IR وكما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (Ch) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

 $h(x) = f(x) - 2 : \mathbb{R}$  من  $f(x) = f(x) - 2 : \mathbb{R}$  من  $f(x) = f(x) - 2 : \mathbb{R}$  بنحویل نقطی بسیط f(x) = f(x) = f(x) بنحویل نقطی بسیط یطلب تعیینه. ثم أنشئ f(x) = f(x).

# م الموضوع 2( دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01:

<u>
 المتتالية العددية (un) المعرفة على مجموعة الأعداد
 المعرفة على مجموعة الأعداد

 $u_n = e^{2^{-n}}$ : الطبيعية IN بحدها العام (e) هو أساس اللوغاريتم النبيري).

1) إثباتان  $(u_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

( $u_n$ ) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي :

 $u_{n+1} = u_n \times q$ : فإن  $q : u_n \times q$  من أجل كل عدد طبيعي  $q : u_n \times q$  حيث  $q : u_n \times q$  عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2} - (n+1)} = e^{\frac{1}{2} - n - 1} = e^{\frac{1}{2} - n} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot u_n$$

 $q=rac{1}{e}=e^{-1}$  : ومنه  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $u_0=rac{1}{e}=\sqrt{e}$  : وحدها الأول

 $\lim_{n\to\infty}u_n: -1--(2$ 

 $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2} - n} = 0$ 

نستنتج أن  $(u_n)$  متتالية متقاربة نحو العدد 0.

3) حساب بدلالة n المجموع Sn حيث:

 $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \sqrt{e} \frac{1 - (e^{-1})^{n+1}}{1 - e^{-1}}$$
$$= \sqrt{e} \cdot \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}}$$

ب) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC): لتكنُّ النفطة (#Xyx من المستوى (ABC) فإنها تحقق:  $\alpha \in R : AM = \alpha . AB + \beta . AC$  $x-1=\alpha.0+\beta.1$  $\{y+1=\alpha.(-1)+\beta.1$ وعته :  $z + 2 = \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot (2)$  $x = \beta + 1$  $\{y = -\alpha + \beta - 1\}$  $z = -\alpha + 2\beta - 2$ ج - التحقق أن x + y - z - 2 = 0 هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC). 0 = 0: نعوض إحداثيات النقطة A في المعادلة نجد 0 = 0 : نعوض إحداثيات النقطة B في المعادلة نجد 0 = 0: نعوض إحداثيات النقطة C في المعادلة نجد ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : x + y - z - 2 = 02) نعتبر المستويين (P) و(Q) المعرفين بمعادلتيهم كما يلي: (Q): 3x + 2y - z + 10 = 0 (P): x - y - 2z + 5 = 0يتقاطعان وفق المستقيم ( $\Delta$ ) ذي التمثيل  $\frac{-n^2+1}{2}+4n>0$ y = -t;  $(t \in R)$ :  $\frac{-n^2 + 8n + 1}{2} > 0$ (P) شعاع ناظمي للمستوى  $n(1;-1;-2) - n^2 + 8n + 1 > 0$ (Q) شعاع ناظمي للمستوى n'(3;2;-1)لدينا  $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$  ومنه الشعاعان  $\overrightarrow{n}$  و  $\overrightarrow{n}$  غير مرتبطين خطيا ومنه المستويين (P).و(Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ). x + y - z - 2 = 0 في المعادلة 0 = 0 if t - 3 - (-t) - 2(t + 1) + 5 = 0

ه من المستاج نوع المسالية (٧٠) : المسالية (٧٠) :  $v_n = \ln u_n = \ln \left( e^{\frac{1}{2} - n} \right) = \frac{1}{2} - n$ ابنا من أجل كل عدد طبيعي n:  $v_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1) = \frac{1}{2} - n - 1 = v_n - 1$  $v_0 = \frac{1}{2}$ وحدها الأول r = -1 وحدها الأول ومنه:  $: P_n$  stell n ily 1/2 -1/2 $P_n = \ln(u_0.u_1.u_2.....u_n)$  $= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$  $= v_0 + v_1 + \dots + v_n$  $=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)=\frac{(n+1)(1-n)}{2}$  $P_n + 4n > 0$ : بعين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث  $P_{n} + 4n > 0$  $\frac{(n+1)(1-n)}{2} + 4n > 0$ رمة  $n \in [0,8]$  و n عدد طبيعي.  $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ 

التمرين 02 :

 $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$  منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (المعلم المعلم المتعامد) تعتبر النقط (2;0;0) ه (1;-2;-3) و (2;0;0) و (2;0;0) ا البات ان A و B و C ليست في استقامية.  $\vec{AC}(1;1;2)$  ,  $\vec{AB}(0;-1;-1)$ 

ولدينا:  $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$  ومنه الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و $\overrightarrow{AB}$  غير مرتبطين خطبا، ومنه النقط A و B و C ليست في استقامية .

 $(\Delta)$  $\subset$ (Q) : درمنه

ومنه : (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  .

(Q) (P) ، (ABC) عبين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

$$(P)\cap(Q)=(\Delta)$$
 : نعلم أن

$$(ABC)$$
نعوض  $y=-t$  في المعادلة الديكارتية للمستوي و $z=t+1$ 

$$t-3-t-t-1-2=0$$
:

: تعيين المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط M بحيث

$$\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$$

$$\sqrt{6} \cdot \frac{|x - y - 2z + 5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{14} \cdot \frac{|3x + 2y - z + 10|}{\sqrt{14}}$$

$$|x - y - 2z + 5| = |3x + 2y - z + 10|$$

$$(x - y - 2z + 5)^2 = (3x + 2y - z + 10)^2$$

$$(x - y - 2z + 5)^2 - (3x + 2y - z + 10)^2 = 0$$

$$[4x + y - 3z + 15].[-2x - 3y - z - 5] = 0$$

$$4x + y - 3z + 15 = 0$$

$$2x + 3y + z + 5 = 0$$
if

$$\left(P_{1}\right) \cup \left(P_{2}\right)$$
 : هي  $\left(\Gamma\right)$  المجموعة المجموعة وعليه فإن المجموعة المجموعة

$$4x + y - 3z + 15 = 0$$
: مستو معادلته (P<sub>1</sub>) حيث

$$2x + 3y + z + 5 = 0$$
: مستو معادلته ( $P_2$ ) مستو

### التمرين03:

z على المعادلة ذات المجهول (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0$$
:

$$z=i$$
:  $z-i=0$ : أي:

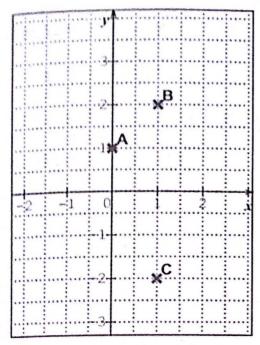
$$z^2 - 2z + 5 = 0$$
:

$$\Delta = -16 = (4i)^2$$

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$
 ومنه :  $z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$  ومنه بحموعة حلول المعادلة 0 =  $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$ 

$$S = \{i; 1 - 2i; 1 + 2i\}$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (i,j) (وحدة الطول (i,j))، تعطى النقط (i,j) (وحدة الطول (i,j))، تعطى النقط (i,j) المتمالة على النوتيب. (i,j) المتمالة النقط (i,j) و (i,j) المترتبب.



A المسقط العمودي للنقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

x = 1: ومعادلة (BC) هي  $H \in (BC)$ 

والمستقيم ( $\Delta$ ) الذي يشمل النقطة H وعمودي على (BC) معادلته هي : y=1 .

وعليه فإن النقطة H هي نقطة تقاطع ( $\Delta$ ) و (BC). أي H(1,1) ومنه H(1,1) ومنه

ج - حساب مساحة المثلث ABC.

$$S = \frac{AH.BC}{2}$$

$$AH = |Z_H - Z_A| = |1| = 1$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |-4i| = 4$$

 $S = 2cm^2$ :

3) ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ . أ – تعيين الكتابة المركبة للتشابه S.

Z' = AZ + B: العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل

$$a = \frac{1}{2}i$$
 ومنه:  $|a| = \frac{\pi}{2}$  ومنه:  $|a| = \frac{1}{2}$ 

## جدول تغيراتها:

| - 00 | +0 |
|------|----|
| -    |    |
|      |    |
| 4 6  | +  |

: عيد  $\alpha$  اثبات أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha$  - إثبات أن المعادلة  $0.7\langle \, \alpha \, \langle \, 0.8 \, \rangle$ 

g مستمرة ومتزايدة على IR

$$g(0.8) \approx 0.06 \approx g(0.7) \approx -0.37$$

أي : 0 >  $g(0.7) \times g(0.8) \times g(0.7)$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث : 0.7  $\alpha$ 

g(x) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة

| x    | - ∞ α | +∞ |
|------|-------|----|
| g(x) | - 2   | +  |

و نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad (1)$ 

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

2) أ - إثبات أنه من أجل كل x من R (2

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 1) + (1-3x)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$=\frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$=\frac{2x^3-4x+x+2}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}=f(x)$$

 $Z' = \frac{1}{2}iZ + b$  ومنه:  $Z_A = \frac{1}{2}iZ_A + b : A$  وبها أن S مركزه S مركزه  $S = Z_A - \frac{1}{2}iZ_A = \frac{1}{2} + i$   $Z' = \frac{1}{2}iZ + \frac{1}{2} + i : Z' = \frac{1}{2}iZ + \frac{1}{2$ 

Sبالتشابه ABC بالتشابه  $\frac{1}{2}cm^2$  بالتشابه  $\frac{1}{2}cm^2$ 

S(C) = C' و S(B) = B' و S(H) = H' و S(A) = A الدينا : S(C) = C' و S(B) = B' و S(A) = A الدينا : S(C) = C' و S(B) = B' و S(A) = A الدينا : S(A) = A' و S(A) = A' و S(A) = A' و S(A) = A' و S(A) = A'

Lومنه مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S هي

$$L = \frac{AH'.B'C'}{2} = \frac{1}{2}cm^2 :$$

نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث M(4)

|z| = OM : is taken in

$$|iz + 1 + 2i| = |i(z - (-2 + i))| = |i||z - z_D| = DM$$
  
 $OM = DM$ :

ومنه مجموعة النقط Mهي محور القطعة المستقيمة D(-2;1) حيث D(-2;1)

## التمرين04 :

0 لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي:

$$g(x) = 2x^{3} - 4x^{2} + 7x - 4$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) : \lim_{x \to -\infty} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

 $y'(x) = 6x^2 - 8x + 7$ :  $x \in R$  من أجل كل  $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$ :  $x \in R$  من أجل كل  $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$ : g'(x) = 0 من أجل كل  $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$ .  $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$ .

إشارة f'(x)من إشارة g(x) f'(x) لأن المقام دوما موجب

| X     | - 00 | 0 |   | α | +∞ |
|-------|------|---|---|---|----|
| X     | -    | Ó | + | T | +- |
| g(x)  | -    |   |   | 0 | +  |
| xg(x) | +    | Ó | - | 0 | +  |

$$[lpha;+\infty[$$
 وعليه :  $f$ متزايدة على المجالين :  $[0;lpha]$  متناقصة على المجال $[0;lpha]$ 

جدول التغيرات:

| x     | - 00 | 0   |   | α           | +00 |
|-------|------|-----|---|-------------|-----|
| f'(x) | +    | 0   | - | 0           | +   |
| f(x)  |      | , 1 |   | 1           | +00 |
|       | - 8  |     |   | $f(\alpha)$ |     |

$$f(x) = 0$$
 ثم حل في  $IR$  المعادلة  $f(1)$  عساب (4

$$f(1) = 0$$

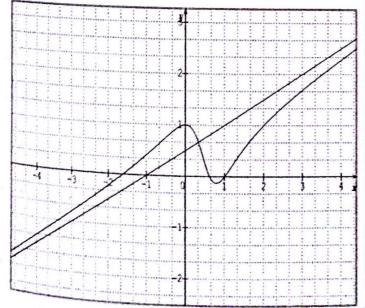
$$x^3 - 2x + 1 = 0$$
:  $y = 0$ 

$$(x-1)(x^2+x-1)=0$$
:

$$x^2 + x + 1 = 0$$
 أو  $x - 1 = 0$ :

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$   $x_1 = 1$ :

 $(C_f)$  أنشئ المستقيم ( $\Delta$ ) والمنحنى ( $C_f$ ).



ب - استنتاج أن المنحنى (C<sub>f</sub>) يقبل مستقبها مقاربا مائلا (Δ) يقبل مستقبها مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلته.

يطلب تعين معادلته.  

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$
لدينا :

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

المنحنى (
$$C_f$$
) يقبل مستقيها مقاربا مائلا ( $\Delta$ ) بجوار  $\phi$ + و $\phi$  معادلته :  $\phi$ 

$$(\Delta)$$
 و  $(C_f)$  و النسبي للمنحني  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ 

$$f(x) - y = \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

إشارة 
$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$
 من إشارة  $f(x)$  وعليه:

$$x \in \left] - \infty, \frac{1}{3} \right[ \ \mathbb{I}(\Delta)$$
يقع فوق ( $C_f$ )

$$x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$$
 لل (۵) يقع نحت ( $C_f$ )

$$A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$$
: في النفطة ( $C_f$ ) يقطع تحت ( $C_f$ )

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

حيث ' أمشتقة الدالة أ.

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2)-2x+1-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

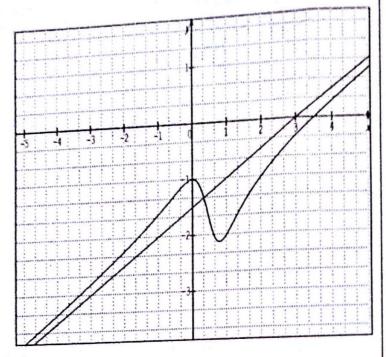
$$=\frac{2x^4-4x^3+7x_2-4x}{\left(2x_2-2x+1\right)^2}=\frac{x\left(2x^3-4x_2+7x-4\right)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

$$=\frac{x\cdot g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

$$h(x) = f(x) - 2$$
 ; Let

 $\overrightarrow{u}(0;-2)$  هو صورة  $(C_f)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $(C_h)$ 

: (Ch) . liil



) لتكن الدالة المعرفة على IR ى كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

(Ch) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

h(x) = f(x) - 2: IR من x عن أجل كل x من أجل كل التحقق أنه من أجل كل

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2$$

$$= \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

استنج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط -ل تعيينه. ثم أنشئ  $(C_h)$ .